Terme, Gleichungen und Zahlenmengen

Die natürlichen Zahlen

Die natürlichen Zahlen werden mit dem Symbol $\mathbb{N}$ dargestellt.
$\mathbb{N} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; ...\}$

Zur einfachen Erfassung von Daten kann man eine Strichliste anfertigen.

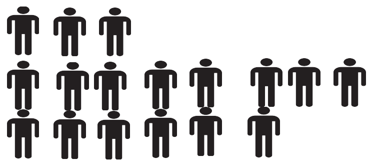
Beispiel: Größen der Schüler einer Klasse

Größe	Strichliste	Anzahl
151-160 cm	III	3
141-150 cm	~~IIII~~ III	8
131-140 cm	~~IIII~~ I	6

Daten können in verschiedenen Diagrammen veranschaulicht werden.
Im Figurendiagramm wird eine Anzahl durch eine Figur oder ein Bild dargestellt.

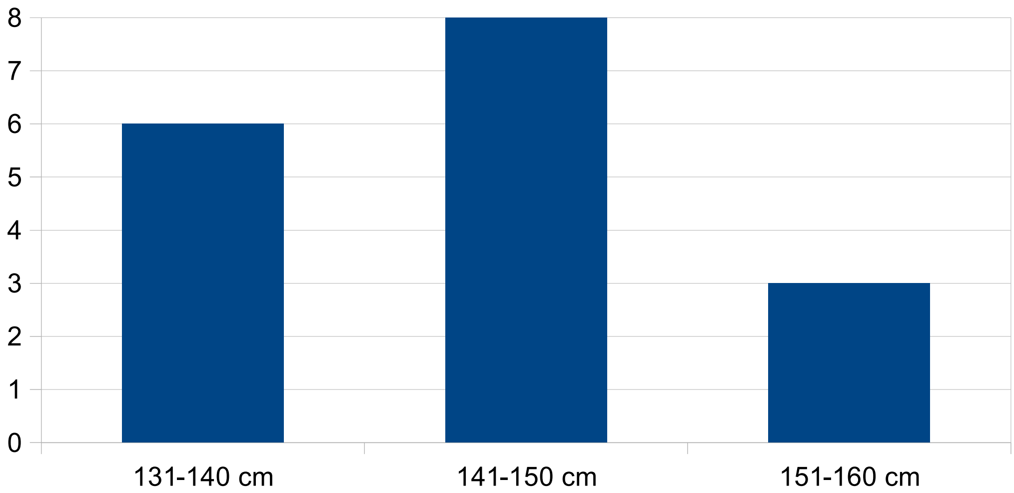
Beispiel:

151-160 cm
141-150 cm
131-140 cm



Im Säulen- und Strichdiagramm werden die Zahlenwerte an einem Zahlenstrahl angetragen.

Beispiel:



Das Zehnersystem als Stellenwertsystem

Die Zahlen im Zehnersystem bildet man aus den Ziffern 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.
Große Zahlen kann man mit Hilfe der Stellenwerttafel leichter lesen.

Billionen			Milliarden			Millionen			Tausender					
HB	ZB	B	HMd	ZMd	Md	HM	ZM	M	HT	ZT	T	H	Z	E
3	7	1	8	9	2	0	5	0	6	4	0	3	8	7

In Worten: dreihunderteinundsiebzig Billionen achthundertzweiundneunzig Milliarden fünfzig Millionen sechshundertvierzigtausenddreihundertsiebenundachtzig

Beispiel: 427 = 4 H + 2 Z + 7E

Addition und Subtraktion natürlicher Zahlen

	Erklärung	**Beispiel**
Addition	1. Summand + 2. Summand = Wert der Summe	3 + 5 = 8
Subtraktion	Minuend – Subtrahend = Wert der Differenz	8 – 3 = 5

Vorteilhaftes Rechnen

	Erklärung	**Beispiel**
Terme mit Plus- und Minusgliedern	Summe der Plusglieder – Summe der Minusglieder	85 – 13 + 9 – 18 + 15 = 85 + 9 + 15 – (13 + 18) = 109 – 31 = 78
Terme mit Plusgliedern	**Assoziativgesetz** der Addition Klammern können in einer Summe beliebig gesetzt oder weggelassen werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert. **Kommutativgesetz** der Addition Die Reihenfolge der Summanden in einer Summe darf verändert werden, ohne dass sich der Wert der Summe ändert.	(85 + 9) + 15 = 85 + 9 + 15 = 85 + (9 + 15) 9 + 15 = 15 + 9

Gliederung einfacher Terme

Terme können gegliedert werden. Die zuletzt ausgeführte Rechenart legt den Namen des Terms fest.

Beispiel: (30 – 11) + 78 → Summe (der 1. Summand ist die Differenz aus dem Minuenden 30 und dem Subtrahenden 11, der 2. Summand ist 78)

Aufgaben:

1. Ermittle das Ergebnis mit Hilfe von vorteilhaftem Rechnen.
   a) 604 + 47 + 96 + 1113
   b) 325 + 431 + 200 + 569 + 175
   c) 37 + 211 + 903 + 439
2. Sortiere die Glieder und berechne das Ergebnis.
   a) 399 – 470 + 734 – 290 + 70
   b) 23 – 127 – 37 + 150 – 90 + 350
   c) 56 + 420 – 156 – 380 + 500

Lösungen:

1. a) (604 + 96) + (47 + 1113) = 700 + 1160 = 1860
   b) (325 + 175) + (431 + 569) + 200 = 500 + 1000 + 200 = 1700
   c) (37 + 903) + (211 + 439) = 940 + 650 = 1590

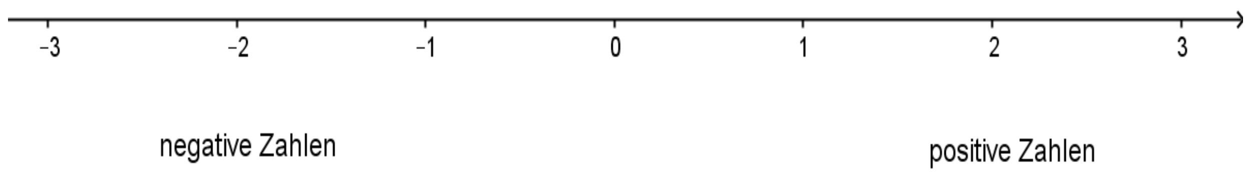
2. a) 734 + 70 + 399 – (470 + 290) = 443
   b) 23 + 150 + 350 – (127 + 37 + 90) = 269
   c) 56 + 420 + 500 – (156 + 380) = 440

Die ganzen Zahlen

Die positiven ganzen Zahlen, die Null und die negativen ganzen Zahlen (Kennzeichnung durch ein vorangestelltes Minuszeichen) bilden zusammen die ganzen Zahlen. Die Null ist weder positiv noch negativ. Die Menge der ganzen Zahlen wird mit dem Symbol $\mathbb{Z}$ bezeichnet.

$\mathbb{Z} = \{\ldots -3 ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \ldots\}$

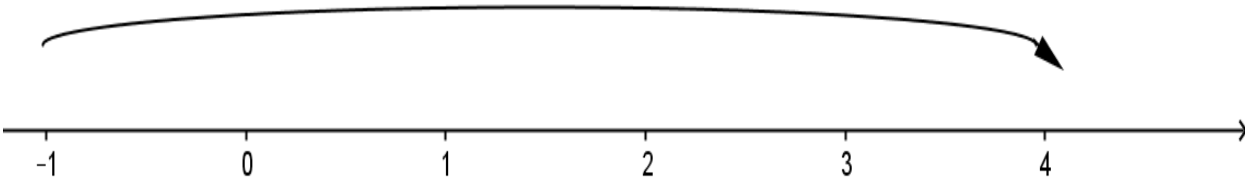
Auf der **Zahlengeraden** finden diese Zahlen Platz.



Zahlen, die sich nur im Vorzeichen unterscheiden, heißen **Gegenzahlen**. Sie sind auf der Zahlengeraden gleich weit vom Nullpunkt entfernt.
Beispiel: – 3 ist die Gegenzahl von 3. Beide Zahlen sind 3 Einheiten vom Nullpunkt entfernt.

An der Zahlengeraden können Rechnungen dargestellt werden.

Beispiel: (– 1) + 5 = 4



Start bei – 1, dann um 5 nach rechts gehen

Vereinfachung der Addition und Subtraktion ganzer Zahlen

	Erklärung	Beispiel
Addieren	Bei gleichen Vorzeichen: 1. Beträge addieren 2. Summe erhält das gemeinsame Vorzeichen Bei unterschiedlichen Vorzeichen: 1. Kleineren Betrag vom größeren subtrahieren 2. Differenz erhält das Vorzeichen des Summanden mit dem größeren Betrag	(–3) + (–9) = –12 → Peter hat 3€ Schulden auf seinem Konto. Er hebt noch 9€ ab und hat somit 12€ Schulden. 5 + (–7) = – (7 – 5) = –2 (–7) + 9 = + (9 – 7) = + 2 = 2 → Peter hat 7€ Schulden auf seinem Konto. Er zahlt 9€ ein und gleicht somit seine Schulden im Wert von 7€ wieder aus. Es bleiben 2€ übrig.
Subtrahieren	Die Gegenzahl einer Zahl wird addiert.	(–8) – 10 = (–8) + (–10) = – (8 + 10) = –18 (–3) – (–6) = (–3) + 6 = + (6 – 3) = 3

Aufgaben:

1. Berechne.
   a) (–9) – (–10) + 21
   b) 3 + (–5) – 37 + 4 – (–7)
   c) –1 + 3 + (–6) – 5 – 8 – (–32)

Lösungen:

1. a) (–9) + 10 + 21 = + (10 – 9) + 21 = 1 + 21 = 22
   b) – (5 – 3) – 37 + 4 + 7 = (–2) – 37 + 11 = – (2 + 37) + 11 = (–39) + 11 = –28
   c) – 1 + 3 – 6 – 5 – 8 + 32 = 15

Multiplikation und Division natürlicher Zahlen

	Erklärung	Beispiel
Multiplikation	$1.\,Faktor \cdot 2.\,Faktor$ = Wert des Produkts	$25 \cdot 4$ = 100
Division	Dividend : Divisor = Wert des Quotienten	100 : 4 = 25

Ist der Dividend null, so ist auch das Ergebnis null. Die Division durch Null ist nicht erlaubt.

Beispiel: 0 : 13 = 0; 13 : 0 ↯

Kommutativgesetz der Multiplikation:
Das Vertauschen zweier Faktoren innerhalb eines Produkts ist erlaubt, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Beispiel: $4 \cdot 25$ = $25 \cdot 4$

Assoziativgesetz der Multiplikation:
In einem Produkt aus mehreren Faktoren können beliebig Klammern gesetzt oder weggelassen werden, ohne dass sich das Ergebnis ändert.

Beispiel: $(3 \cdot 8) \cdot 125$ = $3 \cdot 8 \cdot 125$ = $3 \cdot (8 \cdot 125)$

Primzahlen (z.B 2, 3, 5, 7, 11, …) sind Zahlen, die genau zwei Teiler haben, nämlich sich selbst und die Zahl 1.

Faktorisieren

Natürliche Zahlen lassen sich in Faktoren zerlegen. Durch schrittweise Verfeinerung einer Zerlegung gelangt man zur **Primfaktorzerlegung**, in der nur Primzahlen vorkommen. Tritt ein Primfaktor mehrmals auf, so nutzt man oft die kürzere **Potenzschreibweise.**

Beispiel: $810=10\cdot 81=2\cdot 5\cdot 9\cdot 9=2\cdot 5\cdot 3\cdot 3\cdot 3\cdot 3=2\cdot 3^4\cdot 5$

$\underbrace{3^4}_{Potenz}$ → 3 heißt Basis; 4 heißt Exponent

Regeln:

– Eine Zahl ist durch 2 teilbar, wenn sie die Einerziffer (= die letzte Ziffer einer Zahl) 0, 2, 4, 6, oder 8 hat.

Beispiel: $74=2\cdot 37$

– Eine Zahl ist durch 5 teilbar, wenn sie die Einerziffer 0 oder 5 hat.

Beispiel: $55=5\cdot 11$

– Eine Zahl ist durch 3 teilbar, wenn ihre Quersumme (= alle Ziffern einer Zahl addiert) durch 3 teilbar ist.

Beispiel: $123=3\cdot 41$
→ Die Quersumme von 123 beträgt 6 (1 + 2 + 3 = 6). 123 enthält die Zahl 3 als Faktor.

– Eine Zahl ist durch 9 teilbar, wenn ihre Quersumme durch 9 teilbar ist.

Beispiel: $3321=9\cdot 369=9\cdot 9\cdot 41=41\cdot 9^2$

Quadratzahlen sind Potenzwerte mit 2 als Exponent.
Beim Rechnen werden Potenzen vor Produkten und Quotienten ausgerechnet!

Beispiel: $7\cdot 3^2\cdot 5=7\cdot 9\cdot 5=315$

Aufgaben:

1. Faktorisiere die Zahl mit Hilfe der Primfaktorzerlegung und schreibe das Ergebnis in Potenzschreibweise.
   a) 1680
   b) 216
   c) 189

Lösungen:

1.

a) $1680 = 10\cdot 168 = 10\cdot 4\cdot 42 = 10\cdot 4\cdot 3\cdot 14 = 10\cdot 4\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 2\cdot 5\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 2\cdot 7 = 7\cdot 5\cdot 3\cdot 2^4$

b) $216 = 2\cdot 108 = 2\cdot 2\cdot 54 = 2\cdot 2\cdot 9\cdot 6 = 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 2\cdot 3 = 2^3\cdot 3^3$

c) $189 = 9\cdot 21 = 9\cdot 3\cdot 7 = 3\cdot 3\cdot 3\cdot 7 = 3^3\cdot 7$

Die Stufenzahlen unseres Zehnersystems kann man als **Zehnerpotenzen** schreiben.

Beispiel: $10^3 = 10\cdot 10\cdot 10 = \underbrace{1000}_{3\text{Nullen}}$

Rechenvorteile durch Rechengesetze

Beim Rechnen mit Termen, die mehrere Grundrechenarten enthalten, ist zu beachten:

- Rechenvorteile nutzen, falls möglich
- Klammern zuerst behandeln
- Potenzen vor Punktrechnungen
- Punkt- vor Strichrechnung
- Rechnen von links nach rechts

Distributivgesetz:
Eine Summe wird mit einer Zahl multipliziert, indem man den Faktor auf die Summanden „verteilt".

Beispiel: $7\cdot(10+3) = 7\cdot 10 + 7\cdot 3$

Weitere Version z.B.: (30 + 6) : 3 = 30 : 3 + 6 : 3 oder $6\cdot(19-7) = 6\cdot 19 - 6\cdot 7$

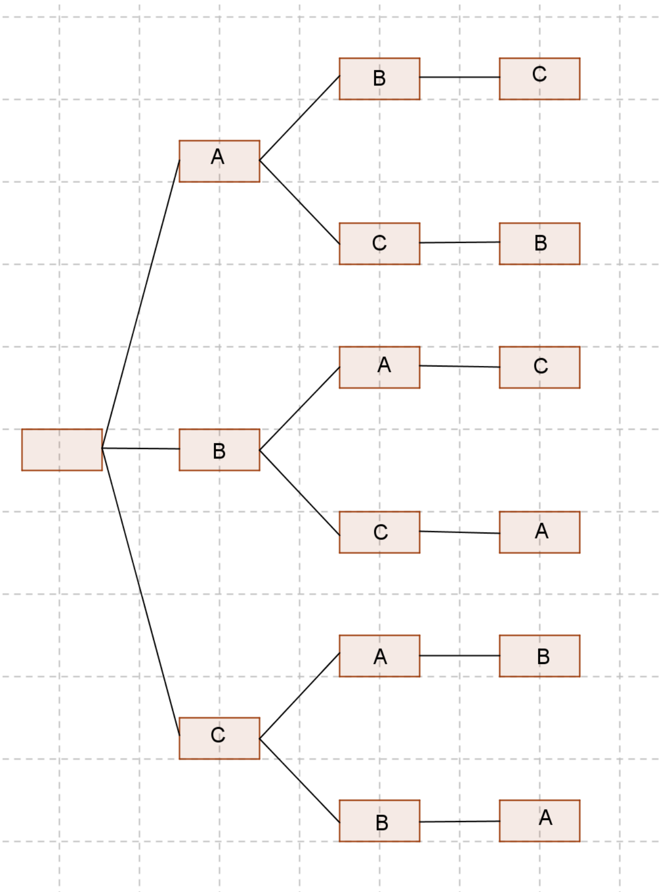
Das Zählprinzip

Situationen, bei denen man mehrere Dinge auswählen und miteinander kombinieren muss, kann man in einem Baumdiagramm darstellen.

Nach dem Zählprinzip entspricht die Gesamtzahl der Möglichkeiten der Anzahl der Baumenden.
Die gesuchte Gesamtzahl ist das Produkt aus den Anzahlen der Möglichkeiten auf jeder Stufe.

Beispiel:

In einer Urne befinden sich 3 Kugeln mit den Aufschriften A, B und C. Es wird immer nacheinander eine Kugel gezogen **ohne sie zurückzulegen**. Die folgenden Ereignisse können dabei entstehen.



1. Möglichkeit: Die Kugel A wird gezogen. Dann wird die Kugel B gezogen. Zum Schluss bleibt die Kugel C übrig.
→ ABC
2. Möglichkeit: Die Kugel A wird gezogen. Dann die Kugel C. Zum Schluss die Kugel B.
→ ACB
3. Möglichkeit: Die Kugel B wird als erstes gezogen. Dann die Kugel A. Zum Schluss die Kugel C.
→ BAC
4. Möglichkeit: Die Kugel B wird gezogen. Dann die Kugel C. Zum Schluss die Kugel A.
→ BCA
5. Möglichkeit: Die Kugel C wird zuerst gezogen. Dann die Kugel A. Zum Schluss die Kugel B.
→ CAB
6. Möglichkeit: Die Kugel C wird gezogen. Dann die Kugel B. Zum Schluss die Kugel A.
→ CBA

Hier: Es gibt $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ Möglichkeiten.
Bei der Anwendung des Zählprinzips muss man immer darauf achten, ob die Wahl auf einer Stufe die weiteren Wahlmöglichkeiten einschränkt.

Multiplikation und Division ganzer Zahlen

Multiplikation:
Man multipliziert ganze Zahlen zuerst ohne Beachtung des Vorzeichens und setzt im Ergebnis das Vorzeichen nach diesen Regeln:

1. Faktor	2. Faktor	Wert	Beispiel
+	–	–	$8 \cdot (-4) = 32$
–	–	+	$-8 \cdot (-4) = 32$
+/–	0	0	$-8 \cdot 0 = 0$

Schriftliche Multiplikation:

$$
\begin{array}{rcccccc}
1703 \cdot 239 & & & & & & \\
\hline
 & 3 & 4 & 0 & 6 & & \\
 & & 5 & 1 & 0 & 9 & \\
+ & & 1 & 5 & 3 & 2 & 7 \\
 & {\scriptstyle 1} & & {\scriptstyle 1} & {\scriptstyle 1} & & \\
\hline
 & 4 & 0 & 7 & 0 & 1 & 7
\end{array}
$$

Überschlag: $2000 \cdot 200 = 400\,000$

Division:
Man dividiert ganze Zahlen zuerst ohne Beachtung des Vorzeichens und setzt dann im Ergebnis das Vorzeichen nach diesen Regeln:

Dividend	Divisor	Wert	Beispiel
+	–	–	$56:(-8)=-7$
–	+	–	$-56:8=-7$
–	–	+	$-56:(-8)=7$
0	+/–	0	$0:(-8)=0$
+	+	+	56 : 8 = 7

Die Division durch Null ist nicht erlaubt! → – 8 : 0 ↯

Schriftliche Division:

$$
\begin{array}{ll}
 & 407017 : 239 = 1703 \\
1 \cdot 239 \rightarrow & -239 \\
 & 1680 \\
7 \cdot 239 \rightarrow & -1673 \\
 & 717 \\
3 \cdot 239 \rightarrow & -717 \\
 & 0
\end{array}
$$

Überschlag: $400\,000 : 200 = 2000$

Bei der schriftlichen Multiplikation und Division kann man mit einer **Überschlagsrechnung** die Größenordnung der Ergebnisse vorhersagen oder überprüfen.