Bruchteile

Bruchteile von Ganzen lassen sich mit Hilfe von Brüchen angeben.
Der **Nenner** gibt an, in wie viele gleiche Teile ein Ganzes zerlegt wird.
Der **Zähler** gibt an, wie viele dieser gleichen Teile zu nehmen sind.

$\frac{6}{7} \leftarrow \mathit{Bruchstrich}$ 6 heißt Zähler; 7 heißt Nenner

Der Nenner eines Bruchs darf nie gleich 0 sein!
Der Zähler eines Bruchs kann dagegen auch 0 sein. Dies besagt, dass kein Teil zu nehmen ist.

Beispiel: $\frac{0}{4}$ von 20g = $(20\text{g}:4)\cdot 0$ = $5\text{g}\cdot 0$ = 0g

Bei gegebenem Bruch kann man den entsprechenden Bruchteil eines Ganzen durch Division und Multiplikation berechnen.

Beispiel: $\frac{5}{7}$ von 21m = $(21\text{m}:7)\cdot 5$ = $3\text{m}\cdot 5$ = 15m

Das ist auch möglich, wenn bei gegebenem Bruch und des entsprechenden Bruchteils das Ganze zu ermitteln ist.

Beispiel: Sind $\frac{4}{9}$ einer Strecke 32km, dann gilt für die Ausgangsstrecke:
$(32\text{km}:4)\cdot 9$ = $8\text{km}\cdot 9$ = 72km

Kürzen und Erweitern von Brüchen

	Erklärung	Beispiel
Erweitern	Multiplikation von Zähler und Nenner des Bruchs mit derselben natürlichen Zahl	$\frac{3}{7} = \frac{3\cdot 5}{7\cdot 5} = \frac{15}{35}$ → Erweitern mit 5
Kürzen	Division von Zähler und Nenner des Bruchs durch dieselbe natürliche Zahl	$\frac{45}{63} = \frac{45:9}{63:9} = \frac{5}{7}$ → Kürzen mit 9

Prozentschreibweise

Brüche mit dem Nenner 100 werden häufig in Prozentschreibweise angegeben.

Beispiel: $\frac{23}{100}$ = 23%

Umgekehrt kann man Brüche in Prozentschreibweise angeben, wenn es gelingt, sie mit dem Nenner 100 zu schreiben.

Beispiel: $\frac{7}{25}$ = (→ Erweitern mit 4) $\frac{28}{100}$ = 28% ;
$\frac{9}{75}$ = (→ Kürzen mit 3) $\frac{3}{25}$ = (→ Erweitern mit 4) $\frac{12}{100}$ = 12%

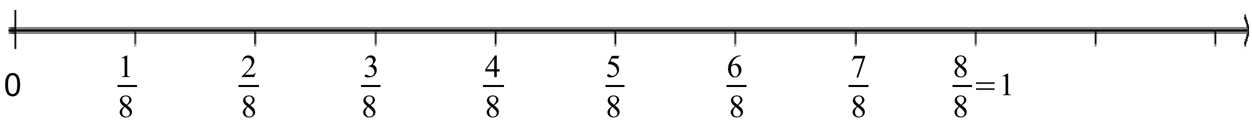
Brüche und zugehörige Prozentangaben, die man auswendig wissen sollte:

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{3}{10}$	$\frac{7}{10}$	$\frac{9}{10}$	$\frac{1}{1}$
1%	25%	50%	75%	20%	40%	60%	80%	5%	10%	30%	70%	90%	100%

Darstellung von Brüchen auf der Zahlengeraden, Bruchzahlen

Jedem Punkt lässt sich ein Punkt auf der Zahlengeraden zuordnen. Dadurch erhält man die Menge der Bruchzahlen.
Den Brüchen mit dem Nenner 1 entsprechen die natürlichen Zahlen.

Beispiel: Der Bruch $\frac{6}{8}$ steht für die Bruchzahl, die man erhält, wenn man auf dem Zahlenstrahl von 0 aus $\frac{6}{8}$ der Einheitsstrecke abträgt.

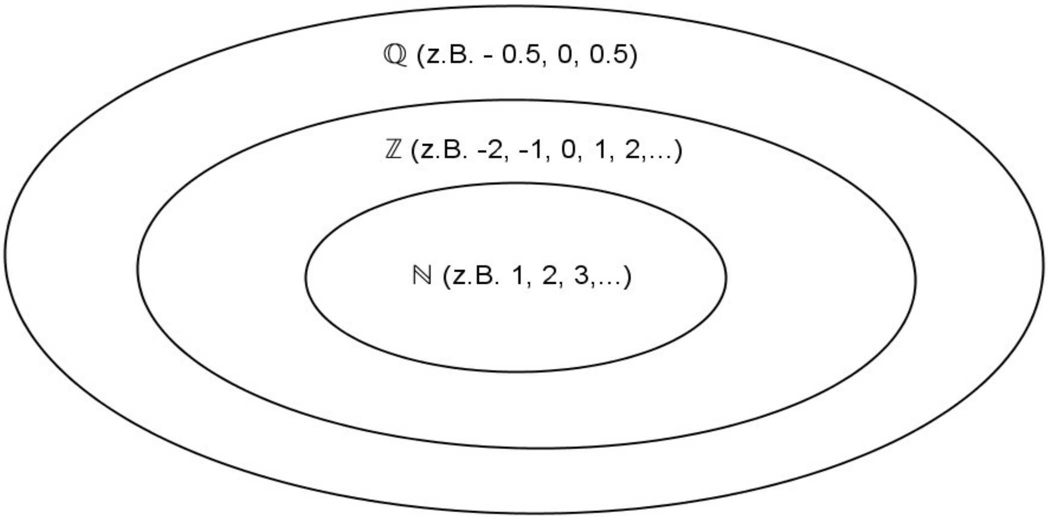


In der Menge der Bruchzahlen kann man natürliche Zahlen uneingeschränkt durch natürliche Zahlen dividieren.

Beispiel: $3:5=\frac{3}{5}$, $8:9=\frac{8}{9}$

Wenn der Zähler größer als der Nenner ist, lassen sich die Brüche in Form von **gemischter Zahlen** schreiben.

Beispiel: $\frac{11}{3}=11:3=3+\frac{2}{3}=3\frac{2}{3}$, $\frac{67}{9}=67:9=7+\frac{4}{9}=7\frac{4}{9}$



Die Menge der rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$ beinhaltet die positiven und die negativen Bruchzahlen zusammen mit der 0. $\mathbb{Q}$ umfasst insbesondere alle natürlichen und ganzen Zahlen.

Dezimalzahlen

Zahlen in Kommaschreibweise bezeichnet man als Dezimalzahlen, die Ziffern nach dem Komma bezeichnet man als Dezimalen.
Dezimalzahlen kann man in einer Stellenwerttafel darstellen. Nach dem Komma werden die Ziffern von links nach rechts als Stufenzahlen Zehntel (z), Hundertstel (h). Tausendstel (t), Zehntausendstel (zt) usw. ergänzt.

Beispiel:

H	Z	E		z	h	t	zt
1	0	9	,	8	0	4	3
		7	,	6	2	5	

Dezimalzahlen lassen sich auch als Bruch schreiben.

Beispiel: $109{,}8043 = 109 + \frac{8}{10} + \frac{4}{1000} + \frac{3}{10000} = 109\,\frac{8043}{10000}$

Der Wert einer Dezimalzahl wird durch Endnullen hinter dem Komma nicht verändert.

Beispiel: 5,900 = 5,9; 4,76500 = 4,765

Wenn die Ziffern vor dem Komma bei Dezimalzahlen gleich sind, werden die Nachkommastellen von links nach rechts verglichen. Die erste Stelle, in der sich zwei Zahlen unterscheiden, gibt an, welche die größere ist.

Beispiel: 4,3 < 4,4 < 4,46 < 4,468

Umwandeln von Brüchen in Dezimalzahlen

Ein Bruch kann in eine endliche Dezimalzahl umgewandelt werden. Dafür darf der Nenner eines Bruchs nach dem Kürzen nur die Primfaktoren 2 und 5 enthalten. Somit kann der Nenner auf eine Stufenzahl erweitert und der Bruch in eine Dezimalzahl umgewandelt werden. Die Anzahl der Nullen der Stufenzahl gibt die Anzahl der Dezimalstellen an.

Beispiel: $\frac{1}{4}=\frac{25}{100}=0{,}25$

Dezimalzahlen rundet man nach der gleichen Regel wie natürliche Zahlen.

Beispiel: 4,83**7**4 ≈ 4,84 (gerundet auf Hundertstel); 2,9**1**1 ≈ 2,9 (gerundet auf Zehntel); 6,32223**5** ≈ 6,3224 (gerundet auf Zehntausendstel)

Um Dezimalzahlen als Prozentsätze darzustellen, müssen sie als Bruch den Nenner 100 besitzen beziehungsweise muss das Komma hinter die Hundertstel verschoben werden.

Beispiel: $0{,}89=\frac{89}{100}$ = 89%; 0,045 = 4,5%

Wichtige gleichwertige Brüche, Dezimalzahlen und Prozentsätze, die man wissen sollte:

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{4}{5}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{5}{8}$	$\frac{7}{8}$
0,25	0,5	0,75	0,2	0,4	0,6	0,8	0,125	0,375	0,625	0,875
25%	50%	75%	20%	40%	60%	80%	12,5%	37,5%	62,5%	87,5%

Addition und Subtraktion von Brüchen

Gleichnamige Brüche:

	Erklärung	Beispiel
Addition	Gleichnamige Brüche werden addiert, indem man den Nenner beibehält und die Zähler addiert.	$\frac{4}{12}+\frac{6}{12}=\frac{(4+6)}{12}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$ → anschließend Kürzen
Subtraktion	Gleichnamige Brüche werden subtrahiert, indem man den Nenner beibehält und die Zähler subtrahiert.	$\frac{13}{27}-\frac{7}{27}=\frac{(13-7)}{27}=\frac{6}{27}=\frac{2}{9}$ → anschließend Kürzen

Nicht gleichnamige Brüche:

Nicht gleichnamige Brüche müssen durch Erweitern oder Kürzen gleichnamig gemacht werden. Der gemeinsame Nenner wird das kleinste gemeinsame Vielfache der Nenner. Diesen nennt man den **Hauptnenner**.

Beispiel:

$$\frac{5}{2}+\frac{4}{3}=\frac{15}{6}+\frac{8}{6}=\frac{(15+8)}{6}=\frac{23}{6} \quad ; \quad \frac{8}{6}-\frac{4}{4}=\frac{32}{12}-\frac{24}{12}=\frac{(32-24)}{12}=\frac{2}{12}=\frac{1}{6}$$

Zur Ermittlung des Hauptnenners werden folgende Überlegungen gemacht:

$\frac{5}{2}+\frac{4}{3}$ → 2 und 3 sind die Nenner der Brüche → der Hauptnenner ist das Produkt aus 2 und 3, weil sie keine gemeinsamen Teiler haben

$\frac{8}{6}-\frac{4}{4}$ → 6 und 4 sind die Nenner der Brüche → diese werden in Primfaktoren zerlegt → den Hauptnenner findet man, indem man jeden Primfaktor in seiner höchsten vorkommenden Potenz nimmt und sie miteinander multipliziert

4	=	2	· 2		
6	=		2	·	3
Hauptnenner	:	2^2	· 3	=	12

Gemischte Zahlen lassen sich vorteilhaft addieren/subtrahieren, wenn man sie sich als Summen denkt.

Beispiel:

$$3\frac{3}{7}+2\frac{5}{7}=5\frac{8}{7}=6\frac{1}{7} \quad ; \quad 5\frac{1}{3}-2\frac{2}{3}=3\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{4}{3}-\frac{2}{3}=2\frac{2}{3}$$

Addition und Subtraktion von Dezimalzahlen

Dezimalzahlen lassen sich schriftlich addieren und subtrahieren. Komma muss immer unter Komma stehen! Fehlende Endnullen können ergänzt werden.

Beispiel:

		9	,	5	4	3
	2	3				
+		0	,	0	7	
		1		*1*		
	3	2	,	6	1	3

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & {\scriptstyle 3} & & & {\scriptstyle 4} & {\scriptstyle 9} & \\
 & 4 & 3 & , & 5 & & \\
- & & 8 & , & 2 & 4 & 7 \\
\hline
 & 3 & 5 & , & 2 & 5 & 3
\end{array}
$$

Man kann auch in einer Zeile nebeneinander rechnen.

3 6

Beispiel: 13,764 + 49,080 = 62,844; 0,4070 – 0,2315 = 0,1755

1 1

Multiplikation und Division von Brüchen

	Erklärung	Beispiel
Multiplikation	Um zwei Brüche miteinander zu multiplizieren, werden Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multipliziert.	$\frac{15}{16}:\frac{4}{5}=\frac{(15\cdot4)}{(16\cdot5)}=\frac{(3\cdot1)}{(4\cdot1)}=\frac{3}{4}$ → Kürzen nicht vergessen! $3\frac{3}{5}\cdot2\frac{1}{3}=(\frac{18}{5})\cdot(\frac{7}{3})=\frac{(18\cdot7)}{(5\cdot3)}=\frac{(6\cdot7)}{(5\cdot1)}=\frac{42}{5}=8\frac{2}{5}$ → gemischte Zahlen werden in Brüche umgewandelt $3\cdot(\frac{4}{7})=(\frac{3}{1})\cdot(\frac{4}{7})=\frac{3\cdot4}{7}=\frac{12}{7}=1\frac{5}{7}$ → natürliche Zahlen werden in Brüche umgewandelt
Division	Um durch einen Bruch zu dividieren, multipliziert man ihn mit seinem Kehrbruch.	$\frac{3}{4}:\frac{5}{7}=(\frac{3}{4})\cdot(\frac{7}{5})=\frac{21}{20}$ → Kehrbruch von $\frac{5}{7}=\frac{7}{5}$

Multiplikation und Division von Dezimalzahlen

Dezimalzahlen werden schriftlich wie natürliche Zahlen multipliziert. Hierbei wird zunächst das Komma nicht berücksichtigt. Das Ergebnis erhält dann so viele Dezimalen wie die Faktoren insgesamt haben.

Beispiel:

$$\begin{array}{r}
2{,}55 \cdot 2{,}1 \\
\hline
510 \\
255 \\
\hline
5{,}355
\end{array}$$

Multiplikation mit einer Stufenzahl → Komma verschiebt sich nach rechts, um so viele Stellen, wie die Stufenzahl Nullen hat
Division durch eine Stufenzahl → Komma verschiebt sich nach links, um so viele Stellen, wie die Stufenzahl Nullen hat

Beispiel:

$47{,}980 \cdot 1000 = 47980{,}0$; $647{,}26 : 100 = 6{,}4726$

Bei der schriftlichen Division einer Dezimalzahl durch eine natürliche Zahl geht man wie bei der Division zweier natürlicher Zahlen vor.
Das Komma wird gesetzt, wenn es beim Dividenden überschritten wird.
Nullen müssen manchmal beim Dividenden ergänzt werden.

Beispiel:

$$\begin{array}{l}
546{,}3 : 45 = 12{,}14 \\
-45 \\
\hline
96 \\
-90 \\
\hline
63 \\
-45 \\
\hline
180 \\
-180 \\
\hline
0
\end{array}$$

Um durch eine Dezimalzahl zu dividieren, verschiebt man zunächst das Komma beim Dividenden und beim Divisor gleich weit um so viele Stellen nach rechts, bis der Divisor eine natürliche Zahl ist und rechnet nach dem selben oben beschriebenen Verfahren weiter.

Beispiel: $5{,}463 : 0{,}45 = 546{,}3 : 45 = 12{,}14$

Vorteilhaftes Rechnen

Jede rationale Zahl kann als Bruch und als Dezimalzahl dargestellt werden. Nach dem Komma kann die Dezimalzahl entweder endlich viele Ziffern oder eine sich ständig wiederholende Ziffer oder Ziffernfolge haben. Diese unendlichen Ziffern nennt man Periode. Sie werden mit einem Querstrich gekennzeichnet. Demnach gibt es **endliche Dezimalzahlen** und **periodische Dezimalzahlen.**

Beispiel: $\frac{3}{20}=3:20=0{,}15$ → endliche Dezimalzahl;

$\frac{2}{3}=0{,}666666...=0{,}\overline{6}$ → periodische Dezimalzahl

$\frac{3}{22}=3:22=0{,}136363636...=0{,}1\overline{36}$ → periodische Dezimalzahl

Gesprochen: Null Komma 1 Periode 36

Wenn im Nenner des vollständig gekürzten Bruchs keine anderen Primfaktoren als 2 und 5 vorkommen, kann der Bruch als endliche Zahl dargestellt werden.

Beispiel: $\frac{11}{140}=2^2\cdot 5\cdot 7$ → keine endliche Zahl

Es ist vorteilhaft bei Addition und Subtraktion rationaler Zahlen mit Dezimalzahlen zu rechnen.

Beispiel: $\frac{3}{8}+0{,}217=0{,}375+0{,}217=0{,}592$

Bei Multiplikation und Division rationaler Zahlen ist es vorteilhaft mit Brüchen zu rechnen.

Beispiel: $0{,}75\cdot(\frac{28}{9})=\frac{3}{4}\cdot(\frac{28}{9})=\frac{7}{3}=2\frac{1}{3}$

Kann ein Bruch im Term nicht als eine endliche Dezimalzahl geschrieben werden, sollte bei jeder Rechenart mit Brüchen gerechnet werden.

Beispiel: $\frac{5}{6}+0{,}25=\frac{5}{6}+\frac{1}{4}=\frac{10}{12}+\frac{3}{12}=\frac{13}{12}=1\frac{1}{12}$

Wenn die Periode einer periodischen Dezimalzahl direkt hinter dem Komma steht, kann die Dezimalzahl als Bruch mit einer „Neunerzahl“ 9, 99, 999, … im Nenner und der Periode im Zähler dargestellt werden.

Beispiel: $0{,}\overline{2}=\frac{2}{9}$; $0{,}\overline{89}=\frac{89}{99}$; $0{,}\overline{456}=\frac{456}{999}$