Rechnen mit rationalen Zahlen

Zu den rationalen Zahlen zählen alle positiven und negativen ganzen Zahlen (-2, -12, 3, 5, ...), alle Dezimalzahlen (-1,2; -3,5; 4,2; 8,7; …) und alle Bruchzahlen ($-\frac{1}{2}, \frac{4}{5}, 1\frac{4}{7}$), sowie Null.

Vergleichen und Ordnen von rationalen Zahlen

Will man rationale Brüche miteinander vergleichen, gibt es dazu zwei Möglichkeiten:

- Bei der ersten wandelt man die Brüche in Dezimalzahlen um und vergleicht diese dann.
  Bsp.: $\frac{1}{2} > \frac{1}{4}$, da $\frac{1}{2} = 0{,}5$, $\frac{1}{4} = 0{,}25$ und $0{,}5 > 0{,}25$

- Die zweite Möglichkeit ist, die Brüche durch Kürzen und Erweitern auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen und die Zähler anschließend miteinander zu vergleichen.
  Bsp.: $\frac{1}{3} < \frac{4}{5}$, da $\frac{1}{3} = \frac{5}{15}$ und $\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$ $\rightarrow$ $\frac{5}{15} < \frac{12}{15}$

Allerdings gibt es auch einige Sonderfälle bei denen sich Brüche auch ohne Umrechnung miteinander vergleichen lassen.

- Sonderfall 1: Bei Brüchen mit gleichen Nennern ist der Bruch größer, dessen Zähler größer ist.
  Bsp.: $\frac{3}{10} < \frac{6}{10}$

- Sonderfall 2: Bei Brüchen mit gleichen Zählern ist der Bruch größer, dessen Nenner kleiner ist.
  Bsp.: $\frac{5}{10} > \frac{5}{12}$

- Sonderfall 3: Oft lassen sich natürliche Zahlen (1, 2, 3, …) zwischen die zu vergleichenden Brüche einordnen.
  Bsp.: $\frac{9}{10} < \frac{13}{12}$,da $\frac{9}{10} < 1$ und $\frac{13}{12} = 1\frac{1}{12} > 1$

Der absolute Betrag

Auf der Zahlengerade bedeutet der absolute Betrag den Abstand der gegebenen Zahl von Null.
Er wird auch als Absolutbetrag, Absolutwert oder schlicht Betrag bezeichnet.
Den Betrag erhält man durch das Weglassen des Vorzeichens, weshalb der Betrag niemals negativ sein kann.
Für den Betrag der Zahl a schreibt man |a|.
Zwei gleiche Zahlen mit unterschiedlichen Vorzeichen haben den gleichen Betrag.

Bsp.: |-3| = |3| = 3

Von zwei negativen rationalen Zahlen ist diejenige größer, die den kleineren Betrag hat.

Bsp.: -0.5>-0.7, da |-0.5|>|-0.7|

Die Vorrangregel

Bevor man eine Rechnung von links nach rechts rechnen kann, muss man einige Regeln beachten.

Eine dieser Regeln lautet, dass man bei Rechnungen, welche Klammern enthalten, die Rechnungen in den Klammern immer zuerst ausführt.

Bsp.: $3\cdot(2+8)=3\cdot 10=30$

Die zweite Regel besagt, dass man bei Rechnungen, welche sowohl Punktrechnungen (Multiplikation bzw. Division) als auch Strichrechnungen (Addition bzw. Subtraktion) enthält , immer zuerst die Punktrechnungen ausführt.
Diese Regel wird auch als die „Punkt- vor Strichrechnung“ bezeichnet.

Bsp.: $5\cdot 3+4=15+4=19$

Die dritte Regel besagt, dass man, nachdem man die Rechnungen in den Klammern ausgerechnet hat, die Potenzen berechnet und erst danach die Punkt- und Strichrechnungen ausführt.

Bsp.: $(2+3)^2+3^2-1=(5)^2+3^2-1=25+9-1=34-1=33$

Führt man diese drei Regeln zusammen, ergibt sich **Klammer vor Potenz vor Punkt- vor Strichrechnung**.
Das heißt, dass bei einer Rechnung, welche Klammern, Punktrechnungen, Strichrechnungen und Potenzen enthält, immer zuerst die Rechnungen in den Klammern, dann die Potenzen, dann die Punktrechnungen und am Schluss die Strichrechnungen ausgeführt werden.

Bsp.: $4+5\cdot(2+2)^2=4+5\cdot 4^2=4+5\cdot 16=4+80=84$

Sind mehrere Rechnungen einer Art vorhanden, geht man von links nach rechts vor.

Bsp.: $4+3+5\cdot 3\cdot 2+5=4+3+15\cdot 2+5=4+3+30+5=7+30+5=37+5=42$

Beispielaufgabe 1:

In dieser Aufgabe sollen die Brüche der Größe nach geordnet werden. Dabei soll man mit der kleinsten Zahl beginnen.

1) $\frac{9}{12}, \frac{8}{12}, \frac{13}{12}, \frac{20}{12}, \frac{14}{12}$ In dieser Bruchreihe sind alle Nenner gleich groß.

Das heißt, dass je größer der Zähler ist, desto größer ist der Bruch.

Ordnet man die Zähler der Größe nach ergibt sich: 8<9<13<14<20

Daraus ergibt sich: $\frac{8}{12} < \frac{9}{12} < \frac{13}{12} < \frac{14}{12} < \frac{20}{12}$

2) $\frac{9}{23}, \frac{9}{2}, \frac{9}{12}, \frac{9}{9}, \frac{9}{15}$ In dieser Bruchreihe sind alle Zähler gleich groß.

Das heißt, dass je größer der Nenner ist, desto kleiner ist der Bruch.

Also ergibt sich daraus: $\frac{9}{23} < \frac{9}{15} < \frac{9}{12} < \frac{9}{9} < \frac{9}{2}$

3) $\frac{3}{36}, \frac{5}{18}, \frac{8}{72}, \frac{18}{108}, \frac{20}{36}$ In dieser Bruchreihe sind alle Nenner Vielfache von 36.

$$\frac{5}{18} = \frac{10}{36}; \frac{8}{72} = \frac{4}{36}; \frac{18}{108} = \frac{6}{36}$$

Nun kann man die Zähler wie in Teilaufgabe 1) wieder der Größe nach ordnen.

Daraus ergibt sich: $\frac{3}{36} < \frac{4}{36} < \frac{6}{36} < \frac{10}{36} < \frac{20}{36}$

4) $\frac{7}{3}, \frac{15}{13}, \frac{8}{4}, \frac{5}{12}, \frac{4}{7}, 1$ Zunächst wandelt man die Brüche in gemischte Zahlen um.

$$\frac{7}{3} = 2\frac{1}{3}; \frac{15}{13} = 1\frac{2}{13}; \frac{8}{4} = 2$$

Anschließend bringt man die anderen beiden Brüche auf den selben Zähler.

$$\frac{5}{12} = \frac{20}{48}; \frac{4}{7} = \frac{20}{35}$$

Daraus ergibt sich: $\frac{5}{12} < \frac{4}{7} < 1 < \frac{15}{13} < \frac{8}{4} < \frac{7}{3}$

Beispielaufgabe 2:

In folgender Aufgabe sollen auf einem geeigneten Zahlengeradenausschnitt die folgenden Zahlen markiert werden.

$$2{,}125\,;\ \frac{5}{4}\,;\ 3\frac{5}{8}\,;\ 1{,}375\,;\ 3{,}25\,;\ \frac{11}{4}\,;\ \frac{12}{32}\,;\ \frac{0}{9}\,;\ 3{,}50$$

Als erstes müssen die Brüche in Dezimalzahlen umgewandelt werden.

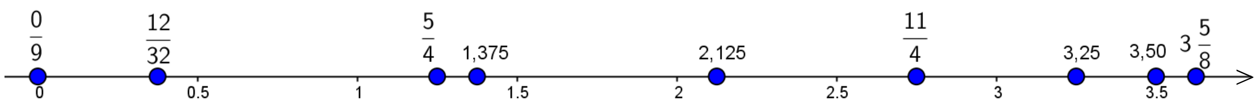
Dazu sollte man wissen, dass $\frac{1}{4}=0{,}25$ und $\frac{1}{8}=0{,}125$ ist.

$$\frac{5}{4}=1\frac{1}{4}=1{,}25 \quad ; \quad 3\frac{5}{8}=3{,}625 \quad ; \quad \frac{11}{4}=2\frac{3}{4}=2{,}75 \quad ; \quad \frac{12}{32}=\frac{3}{8}=0{,}375 \quad ; \quad \frac{0}{9}=0$$

Nun können die Brüche und Dezimalzahlen der Größe nach geordnet werden.

$$\frac{0}{9}<\frac{12}{32}<\frac{5}{4}<1{,}375<2{,}125<\frac{11}{4}<3{,}25<3{,}50<3\frac{5}{8}$$

Nun kann man die Zahlen auf einem Zahlenstrahl anordnen.



Beispielaufgabe 3:

In folgender Aufgabe sollen folgende Terme berechnet werden.

1) $\frac{3}{5}-1{,}2 \ = \ \frac{3}{5}-1\frac{1}{5} \ = \ \frac{3}{5}-\frac{6}{5} \ = \ -\frac{3}{5}$

2) $-0{,}2\cdot(-2{,}0)\cdot(-4) \ = \ 0{,}4\cdot(-4) \ = \ -1{,}6$

3) $\frac{25}{3}\cdot(-1{,}2)^2:\frac{3}{9} \ = \ \frac{25}{3}\cdot\left(-\frac{6}{5}\right)^2:\frac{3}{9} \ = \ \frac{25}{3}\cdot\frac{36}{25}:\frac{3}{9} \ = \ \frac{36}{3}:\frac{3}{9} \ = \ \frac{36}{3}\cdot\frac{9}{3} \ = \ \frac{36\cdot 9}{9} \ = \ \frac{36}{1}$
$= \ 36$

4) $-3\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{18}+\frac{2}{9}\right)+1\frac{1}{6} \ = \ -3\frac{1}{2}-\left(-\frac{5}{18}+\frac{4}{18}\right)+\frac{7}{6} \ = \ -3\frac{9}{18}-\left(-\frac{1}{18}\right)+\frac{21}{18} \ =$
$-3\frac{8}{18}+\frac{21}{18} \ = \ -\frac{62}{18}+\frac{21}{18} \ = \ -\frac{41}{18} \ = \ -2\frac{5}{18}$

5) $-3\cdot 1\frac{5}{3} \ = \ -\frac{3}{1}\cdot\frac{8}{3} \ = \ -\frac{8}{1} \ = \ -8$

6) $(-1{,}5)^2-\left(-\frac{3}{12}\right) \ = \ \left(-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{12} \ = \ \frac{9}{4}+\frac{3}{12} \ = \ \frac{27}{12}+\frac{3}{12} \ = \ \frac{30}{12} \ = \ \frac{15}{6} \ = \ 2\frac{3}{6}$
$= \ 2{,}5$

Beispielaufgabe 4:

In der folgenden Aufgabe soll man das Vorzeichen des Ergebnisses bestimmen, ohne dieses zu berechnen.

1) $(-2{,}5)^2 \cdot (-0{,}125) = ?$ → Das Vorzeichen muss negativ sein, da die erste Klammer aufgrund $()^2$ positiv ist.

2) $(-1{,}5 + 0{,}5) \cdot (-3) = ?$ → Das Vorzeichen muss positiv sein.

3) $-5 \cdot (-2)^3 \cdot (-1{,}25) = ?$ → Das Vorzeichen muss negativ sein, da die zweite Klammer aufgrund $()^3$ negativ ist.