Umformen von Termen

Zusammenfassung der Rechengesetze für rationale Zahlenwert

Zwei Terme nennt man **äquivalent** oder **gleichwertig**, wenn jede mögliche Einsetzung bei beiden Termen zum gleichen Ergebnis führt.

Für alle rationalen Zahlen gilt:

Kommutativgesetz der Addition und der Multiplikation

$$a+b=b+a$$

$$a\cdot b=b\cdot a$$

Beispiele:

$$13+21=21+13=34$$

$$4\cdot 10=10\cdot 4=40$$

Assoziativgesetz der Addition und der Multiplikation

$$a+b+c=(a+b)+c=a+(b+c)$$

$$a\cdot b\cdot c=(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$$

Beispiele:

$$(2+3)+4=2+(3+4)=9$$

$$(2\cdot 3)\cdot 4=2\cdot(3\cdot 4)=24$$

Distributivgesetz für die Multiplikation einer Summe und einer Differenz

$$a\cdot(b+c)=(b+c)\cdot a=ab+ac$$

$$a\cdot(b-c)=(b-c)\cdot a=ab-ac$$

Beispiele:

$$5\cdot(7+3)=(7+3)\cdot 5=5\cdot 7+5\cdot 3=50$$

$$4\cdot(8-3)=(8-3)\cdot 4=4\cdot 8-4\cdot 3=20$$

Umformen von Summen und Produkten

Potenzen mit gleicher Basis kann man multiplizieren, indem man die gemeinsame Basis mit der Summe der Exponenten potenziert.

$$x^n\cdot x^m=x^{(n+m)}$$

Beispiel:

$$x^4\cdot x^5=x^9$$

Produkte aus Zahlen und Variablen werden vereinfacht, indem sowohl die Zahlenfaktoren als auch die Potenzen mit gleichen Basen multipliziert werden.

Beispiel:
$2ab^2 \cdot 4ab^3c = 8a^2b^5c$

Produkte der Art $3b^2 \cdot (b^2 + 2ab)$ werden durch Anwenden des Distributivgesetzes vereinfacht.

Beispiel:
$3b^2 \cdot (b^2 + 2ab) = 3b^4 + 6ab^3$

Terme, die sich nur im Zahlenfaktor unterscheiden, heißen gleichartige Terme.

Beispiel:
$4x^3y^2$ und $11x^3y^2$ sind gleichartig.
$4x^3y^2$ und $4x^3y$ sind nicht gleichartig.

Gleichartige Terme werden addiert bzw. subtrahiert, indem Zahlenfaktoren addiert bzw. subtrahiert werden und das Variablenprodukt beibehalten wird.

Beispiel:
$2{,}5a^3y^2 + 7a^3y^2 - a^3y^2 = 8{,}5a^3y^2$

Ungleichartige Terme können nicht zusammengefasst werden.

Es ist je nach verfolgtem Ziel sinnvoll, Summen zu faktorisieren (in ein Produkt zu verwandeln.

Beispiel:
$\frac{2}{3}z + \frac{1}{3}az = \frac{1}{3}z$

Klammerregeln – Das Multiplizieren von Summen

Jedes Glied der ersten Klammer wird mit jedem Glied der zweiten Klammer unter Berücksichtigung der Vorzeichen multipliziert. Anschließend werden die Produkte addiert.

Beispiel:
$(2x-1)(x-5) = 2x \cdot x + 2x \cdot (-5) + (-1) \cdot x + (-1) \cdot (-5) = 2x^2 - 10x - x + 5 = 2x^2 - 11x + 5$

Ein Minuszeichen vor der Klammer dreht alle Vorzeichen in der Klammer um.

Beispiel:
$-(x^3 + x^4 - x) = -x^3 - x^4 + x$

Werden mehr als zwei Summen bzw. Differenzen miteinander multipliziert, so geht man der Reihe nach vor: zuerst die ersten beiden multiplizieren, dann das Ergebnis mit der nächsten Klammer multiplizieren.

Beispiel:

$$[(2b+2)(b+5)](b-3)=[2b^2+10b+2b+10](b-3)=[2b^2+12b+10](b-3)$$

$$2b^3-6b^2+12b^2-36b+10b-30=2b^3+6b^2-26b-30$$