1.Rationale und irrationale Zahlen

1.1Quadratwurzeln

Definition

Die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl *r* ≥ *0* (geschrieben $\sqrt{r}$) ist diejenige nicht-negative Zahl, deren Quadrat *r* ergibt.

$\sqrt{25}$ = 5; denn 5^2 = 25 und 25 > 0

$\sqrt{0}$ = 0; denn 0^2 = 0 und 0 ≥ 0

Definition

Die Quadratwurzel aus einer rationalen Zahl *r* ≥ *0* ist die nicht-negative Lösung der Gleichungen $x^2 = r$.

$\sqrt{3{,}24}$ = 1,8; denn $1{,}8^2$ = 3,24 und 1,8 > 0

r heißt Radikand der Wurzel.
Der Radikand einer Wurzel darf nicht negativ sein. Es ist $\sqrt{x^2} = |x|$.

$\sqrt{(-8)^2}$ = | -8 | = 8

Wenn die Gleichung $x^2 = r$ mit r > 0 in ***Q*** lösbar ist, dann hat sie die beiden Lösungen $\sqrt{r}$ und $-\sqrt{r}$.

$x^2 = 4 \leftrightarrow x = \sqrt{4}$ oder $x = -\sqrt{4}$
also x = 2 oder x = -2

Eine rationale Zahl besitzt genau dann eine rationale Quadratwurzel, wenn in vollständig gekürzten Form im Nenner und im Zähler alle Primfaktoren mit geraden Exponenten vorkommen.

$$\sqrt{\frac{175}{252}} = \sqrt{\frac{7\cdot 5^2}{7\cdot 2^2\cdot 3^2}} = \sqrt{\frac{5^2}{2^2\cdot 3^2}} = \frac{5}{2\cdot 3} = \frac{5}{6}$$

Für $\frac{175}{252} = \frac{11\cdot 5^2}{7\cdot 2^2\cdot 3^2}$ gibt es keine rationale Quadratwurzel.

Aufgaben:

1. Berechne.

a) $\sqrt{9}$

b) $\sqrt{0{,}16}$

c) $\sqrt{(-4)^2}$

d) $\sqrt{\frac{12}{3}}$

e) $\sqrt{8} \cdot 7$

Lösungen

1. Berechne.

a) $\sqrt{9}$ *= 3*

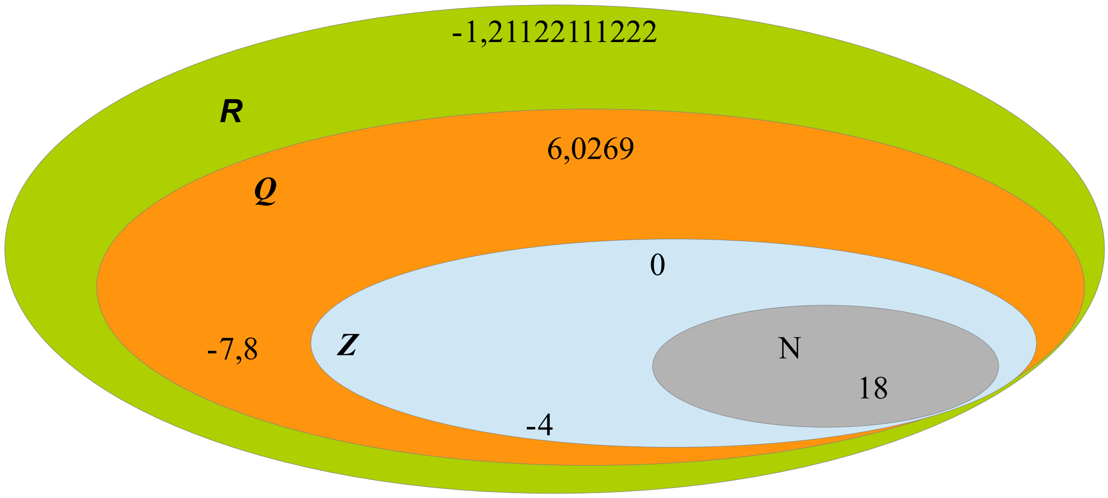
b) $\sqrt{0,16}$ *= 0,4*

c) $\sqrt{(-4)^2}$ *= 4*

d) $\sqrt{\frac{12}{3}}$ *= 2*

e) $\sqrt{8}$ *· 7 =* $\sqrt[14]{2}$

1.2 Irrationale Zahlen und die Menge der reellen Zahlen



Die Menge **R** der reellen Zahlen besteht aus der Menge der rationalen Zahlen und der Menge der irrationalen Zahlen. Die rationalen Zahlen sind die endlichen und unendlichen, periodischen Dezimalzahlen, die irrationalen Zahlen sind die unendlichen, nicht-periodischen Dezimalzahlen.
Die Menge der reellen Zahlen **R** ist also die Menge aller Dezimalzahlen.
Ist eine narürliche Zahl keine Quadratzahl, so ist ihre Quadratwurzel irrational. Irrationale Zahlen lassen sich durch endliche Dezimalzahlen beliebig genau annähern.

Das Heron-Verfahren liefert mit einem Startwert $x_0 > 0$ mittels der Formel

$$x_n = \left(x_{n-1} + \frac{a}{x_{n-1}}\right) : 2$$

schnell sehr gute Näherungswerte x_n für $\sqrt{a}$.

In der folgenden Tabellenkalkulation braucht man noch die Werte für a und x_0 (*gelbe Felder*) einzugeben.

	A	B	C
1	Ermitteln von Wurzel aus *a*		
2	a = 11		
3			
4	*n*	*xn*	*a/xn*
5	0	5.00000000000000	2.20000000000000
6	1	3.60000000000000	3.05555555555556
7	2	3.32777777777778	3.30550918196995
8	3	3.31664347987386	3.31660610094225

Aufgaben:

1. Berechne durch systematisches Probieren für die folgenden reellen Zahlen jeweils Näherungswerte, die von den exakten Werten um weniger als 0,001 abweichen.

a) $\sqrt{13}$

b) $\sqrt{153}$

c) $\sqrt{\frac{19}{17}}$

d) $\sqrt{\frac{3\cdot 4}{9}}$

Lösungen:

1. Berechne durch systematisches Probieren für die folgenden reellen Zahlen jeweils Näherungswerte, die von den exakten Werten um weniger als 0,001 abweichen.

a) $\sqrt{13}$ = 3,605

b) $\sqrt{153}$ = 12,369

c) $\sqrt{\frac{19}{7}}$ = 1,647

d) $\sqrt{\frac{3\cdot 4}{9}}$ = 1,154

1.3 Umgang mit Wurzeltermen

Summen, Produkte und Quotienten von reellen Zahlen, die nicht alle rational sind, lassen sich im Allgemeinen nur näherungsweise berechnen.

$\sqrt{16} - \sqrt{4}$ *= 4 – 2 = 2*

π/2 = 3,14 : 2 = 1,57

oder im TR: π · $\sqrt{5}$ *= 7,024814731*

Für das Produkt bzw. den Quotienten von Quadratwurzeln gilt:

$\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{a\cdot b}$ *(a,b ≥ 0)*

$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ *(a ≥0, b > 0)*

$\sqrt{4,5} \cdot \sqrt{2} = \sqrt{9} = 3$

$\frac{\sqrt{12,5}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6,25} = 2,5$

Summen und Differenzen von Quadratwurzeln kann man nur dann zusammenfassen, wenn die Radikanden gleich sind.

$2\cdot\sqrt{3} + 3\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{7} = 5\cdot\sqrt{3} - 4\cdot\sqrt{7}$

Lässt sich der Radikand so faktorisieren, dass ein Faktor eine Quadratzahl ist, dann kann die Wurzel teilweise radiziert werden. Umgekehrt lässt sich ein positiver Faktor vor einer Quadratwurzel durch Quadrieren unter die Wurzel ziehen.

$\sqrt{108} = \sqrt{3} \cdot 36 = 6 \cdot \sqrt{3}$

$\sqrt{a^2} \cdot b = |a| \cdot \sqrt{b} \ (b \geq 0)$

$2 \cdot \sqrt{6} = \sqrt{2^2} \cdot 6 = \sqrt{24}$

Quadratwurzeln im Nenner eines Bruchs können durch geeignetes Erweitern beseitigt werden (Rational machen des Nenners).

$\frac{6}{\sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{6 \cdot \sqrt{2}}{2} = 3 \cdot \sqrt{2}$

<u>Aufgaben:</u>

1. Vereinfache soweit wie möglich.

a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{8} \cdot 7$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7}$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2}}$

d) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{12}$

e) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}}$

2. Richtig oder Falsch? Korrigiere die falschen Lösungen!

a) $\sqrt{48} = 3 \cdot \sqrt{4}$

b) $\sqrt{4} + 36 = 8$

c) $\sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$

d) $\sqrt{200} = 5 \cdot \sqrt{8}$

e) $\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2}} = 6$

<u>Lösungen:</u>

1. Vereinfache soweit wie möglich.

a) $\sqrt{13} \cdot \sqrt{8} \cdot 7 = 14 \cdot \sqrt{26}$

b) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{7} = 7$

c) $\sqrt{8} \cdot \sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2}} = 2 \cdot \sqrt{6}$

d) $\sqrt{50} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{12} = 20 \cdot \sqrt{3}$

e) $\frac{\sqrt{12}}{\sqrt{2}} = \sqrt{6}$

2. Richtig oder Falsch? Korrigiere die falschen Lösungen!

a) $\sqrt{48} = 3 \cdot \sqrt{4}$ → Falsch: $\sqrt{48} = 4 \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{4}$ + 36 = 8→ Falsch: $\sqrt{4}$ + 36 = 38

c) $\sqrt{80} = 4 \cdot \sqrt{5}$ → Richtig

d) $\sqrt{200} = 5 \cdot \sqrt{8}$ → Falsch: $\sqrt{200} = 10 \cdot \sqrt{2}$

e) $\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2}}$ = 6 → Falsch: $\sqrt{\frac{3 \cdot 2}{2}} = \sqrt{3}$

1.4 Potenzen mit rationalen Exponenten

Definition

Die n-te Wurzel (n ε **N**) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist diejenige nicht-negative Zahl, deren n-te Potenz a ergibt.

$\sqrt[3]{8} = 2$, *denn* $2^3 = 8$ *und* $2 > 0$

$\sqrt[4]{\frac{1}{10000}} = \frac{1}{10}$, *denn* $(\frac{1}{10})^4 = \frac{1}{10000}$ *und* $\frac{1}{10} > 0$

Definition

Die n-te Wurzel (n ε **N**) aus einer reellen Zahl $a \geq 0$ ist die nicht-negative Lösung der Gleichung $x^n = a$.

Schreibweise: $\sqrt[n]{a}$ oder $a^{1/n}$; a heißt Radikand der *n*-ten Wurzel.
Zum Beispiel: $27^{1/3} = \sqrt[3]{27} = 3$

Potenzen mit ratinalen Exponenten sind so definiert, dass die von Potenzen mit ganzzahligen Exponenten bekannten Rechengesetzen weiterhin gelten.
Für a, b ε **R** und x, y ε **Q** gilt:

(1) $a^x \cdot a^x = a^{x+y}$	*Bsp.:* $8^{1/3} \cdot 8^{5/3} = 8^{1/3+5/3} = 8^2$
(2) $a^x : a^y = a^{x-y}$	*Bsp.:* $0{,}16^2 : 0{,}16^{1{,}5} = 0{,}16^{2-1{,}5} = 0{,}16^{0{,}5} = \sqrt{0{,}16}$ $0{,}4$

(3) $\boldsymbol{(a^x)^y = a^{x \cdot y}}$	*Bsp.:* $(8^{1/3})^6 = 8^{1/3 \cdot 6} = 8^{6/3} = 8^2$
(4) $\boldsymbol{a^x \cdot b^x = (a \cdot b)^x}$	*Bsp.:* $1{,}6^{0{,}5} \cdot 10^{0{,}5} = (1{,}6 \cdot 10)^{0{,}5} = 16^{0{,}5} = \sqrt{16} = 4$
(5) $\boldsymbol{a^x : b^x = (a : b)^x}$	*Bsp.:* $1{,}6^{0{,}5} : 10^{0{,}5} = (1{,}6 : 10)^{0{,}5} = 0{,}16^{0{,}5} = \sqrt{16} = 0{,}4$

Die Wurzelschreibweise lässt sich bei der Verwendung rationaler Exponenten komplett durch die Potenzschreibweise ersetzen:

$$\sqrt[n]{a^m} = (a^m)^{1/n} = a^{m \cdot 1/n} = a^{m/n}$$; für alle reellen Zahlen $a \geq 0$.

Aufgaben:

1. Berechne den Wert ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt[4]{625}$

b) $\sqrt[3]{0{,}008}$

c) $80^{-0{,}25} \cdot 80^{-0{,}25}$

d) $(32^{0{,}2})^4$

e) $(11^2)^{0{,}5}$

Lösungen:

1. Berechne den Wert ohne Taschenrechner.

a) $\sqrt[4]{625} = 625^{1/4} = 5$

b) $\sqrt[3]{0{,}008} = 0{,}008^{1/3} = 0{,}2$

c) $80^{-0{,}5} \cdot 80^{-0{,}5} = 80^{-1} = \frac{1}{80} = 0{,}0125$

d) $(32^{0{,}2})^4 = 32^{0{,}2 \cdot 4} = 16$

e) $(11^2)^{0{,}5} = 11^{2 \cdot 0{,}5} = 11$