Globales Differenzieren

Ableitungsfunktion

Die Ableitungsfunktion f' ist diejenige Funktion, die jeder Stelle x, an der f differenzierbar ist, die Ableitung f'(x) zuordnet:

$$f'(x) = \lim(h \to 0) \frac{(f(x+h) - f(x))}{h}$$

Ableitung ganzrationaler Funktionen

Ableitung der Potenzfunktion

Die Potenzfunktion f mit $f(x) = x^n$ und rationalem Exponenten n ist differenzierbar und es gilt: $f'(x) = n \cdot x^{(n-1)}$

Beispiele:

$f(x) = x^5 \Rightarrow f'(x) = 5 \cdot x^4$

$f(x) = x^{-1} \Rightarrow f'(x) = -1 \cdot x^{-2} = -x^{-2}$

$f(x) = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{x}$

Ableitung der Sinus- und Kosinusfunktion

Die Ableitung der Sinusfunktion ist die Kosinusfunktion: $f(x) = sinx \Rightarrow f'(x) = cosx$

Die Ableitung der Kosinusfunktion: $f(x) = cosx \Rightarrow f'(x) = -sinx$

Die Ableitung der Wurzelfunktion

Die Wurzelfunktion f mit $f(x) = \sqrt{x}$ ist für x>0 differenzierbar und es gilt:

$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Wurzeln kann man als Potenzen mit Brüchen als Exponenten schreiben:

$f(x) = \sqrt{x} = x^{\frac{1}{2}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$

Faktorregel für konstante Faktoren

Ist f eine differenzierbare Funktion und c eine reelle Zahl, dann ist die Funktion g mit $g(x) = c \cdot f(x)$ differenzierbar und es gilt: $g'(x) = c \cdot f'(x)$

Beispiel: $f(x)=x^5; g(x)=3\cdot f(x) \Rightarrow g'(x)=3\cdot f'(x)=3\cdot 5\cdot x^4=15x^4$

Summenregel

Sind f und g differenzierbare Funktionen, dann ist die Summenfunktion s differenzierbar und es gilt: $s(x)=f(x)+g(x) \Rightarrow s'(x)=f'(x)+g'(x)$

Beispiele:
a) $f(x)=x^5+3x^4 \Rightarrow f'(x)=5x^4+12x^3$

b) $f(x)=\sin(x)-\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\cos(x)+\sin(x)$

Produktregel

Sind u und v differenzierbare Funktionen, dann ist die Funktion f mit $f(x)=u(x)\cdot v(x)$ differenzierbar und es gilt: $f'(x)=u'(x)\cdot v(x)+u(x)\cdot v'(x)$

Beispiele:
a) $f(x)=x^5\cdot 2x^7 \Rightarrow f'(x)=5x^4\cdot 2x^7+x^5\cdot 14x^6=10x^{11}+14x^{11}=24x^{11}$

Diese Funktion könnte auch mit der Regel zur Ableitung der Potenzregel gelöst werden:
$f(x)=x^5\cdot 2x^7 \Rightarrow f(x)=2x^{12} \Rightarrow f'(x)=24x^{11}$

b) $f(x)=x\cdot e^x \Rightarrow f'(x)=1\cdot e^x+x\cdot e^x=e^x+x\cdot e^x$

c) $f(x)=x\cdot\sin(x) \Rightarrow f'(x)=1\cdot\sin(x)+\cos(x) \Rightarrow f'(x)=\sin(x)+\cos(x)$

Kettenregel

Die Funktionen u und v seien im Intervall I differenzierbar. Dann ist die Funktion f mit $f(x)=v(u(x))$ in I differenzierbar und es gilt: $f'(x)=v'(u(x))\cdot u'(x)$

Beispiele:

$$\sin(2\mathrm{x})=\cos(2\mathrm{x})\cdot 2=2\cos(2\mathrm{x})$$

$$\cos(x^2)=-\sin(x^2)\cdot 2\mathrm{x}$$

$$e^{-\frac{1}{2}x^2}=e^{-\frac{1}{2}x^2}\cdot(-x)=-xe^{-\frac{1}{2}x^2}$$

Ableitung von gebrochen-rationalen Funktionen

Quotientenregel

Die Funktionen Z und N seien im Intervall I differenzierbar und N(x)≠0 für alle x∈I. Dann ist der Quotient $f(x)=\frac{Z(x)}{N(x)}$ in i differenzierbar und es gilt:

$$f‘(x)=\frac{(N(x)\cdot Z‘(x)-Z(x)\cdot N‘(x))}{(N(x))^2}$$

Merke: **N**enner mal **A**bleitung des **Z**ählers minus **Z**ähler mal **A**bleitung des **N**enners durch **N**enner zum Quadrat (kurz: **NAZ minus ZAN durch N^2**)

Beispiel:

$$f(x)=\frac{x^2+16x+3}{5x+x^3}$$

$$f'(x)=\frac{(5x+x^3)\cdot(2x+16)-(x^2+16x+3)\cdot(5+3x^2)}{(5x+x^3)^2}$$