Anwendung der Differentialrechnung

Beispiel:

Wir untersuchen das Monotonieverhalten der Funktion f mit $f(x) = 4x^3 + 2x^2$

Monotonie:

$f(x) = 4x^3 + 2x^2$

$f'(x) = 12x^2 + 4x$

$f'(x) = 0$

$12x^2 + 4x = 0$

$3x^2 + x = 0$

$x(3x+1) = 0 \quad \Rightarrow \quad x_1 = 0$

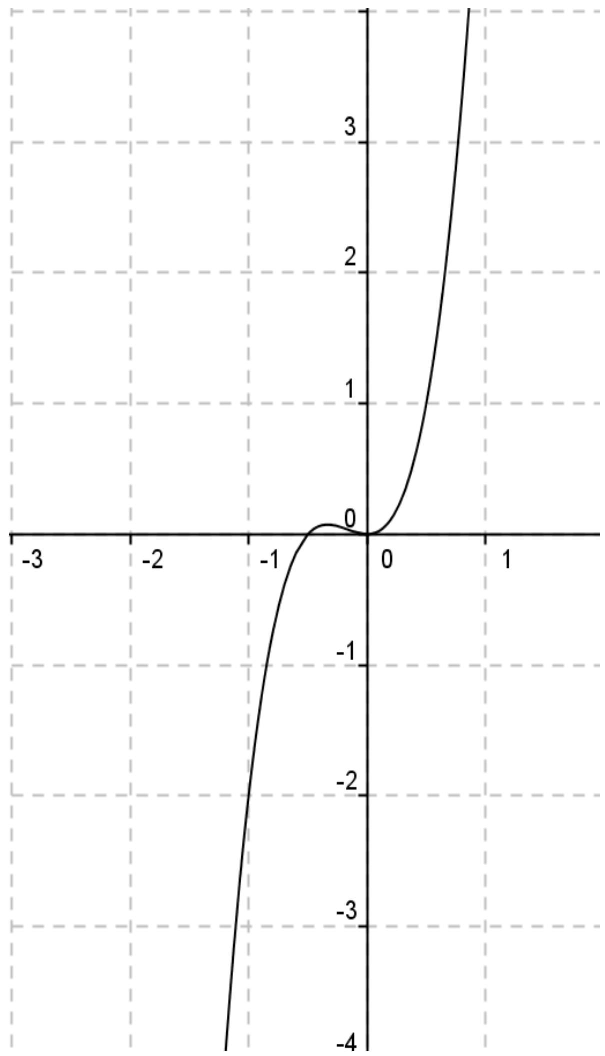
$3x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x_2 = -\frac{1}{3}$

x	- ∞ < x < -1/3	x = -1/3	-1/3 < x < 0	x = 0	0 < x < ∞
x	-	-	-	0	+
(3x+1)	-	0	+	+	+
f'(x)	+	0	-	0	+
G_f	steigt	Hochpunkt HoP	fällt	Tiefpunkt TiP	steigt

$y_{HoP} = f(-\frac{1}{3}) = \frac{2}{27} \quad \Rightarrow \quad HoP(-\frac{1}{3} / \frac{2}{27})$

$y_{Tip} = f(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad TiP(0/0)$

Graph:



Extremwertprobleme

Hängt eine zu optimierende Größe von zwei Variablen ab, müssen wir mithilfe einer Nebenbedingung eine Variable aus dem zugehörigen Term eliminieren.
Dann können wir das Extremum der Funktionen mit einer Variablen bestimmen. Dabei ist auf den Definitionsbereich zu achten, der aus der Vorgaben folgt.

Beispiele:

a) Quader

Die Firma, die den Quader herstellt, möchte den geringsten Materialverbrauch ermitteln, um die Kosten für die Produktion so klein wie möglich zu halten.

Gesucht ist also die kleinste Oberfläche und damit das Minimum der Oberflächeninhaltsfunktion.

Die Länge l ist doppelt so lang wie die Breite b (=erste Nebenbedingung)

Oberflächeninhalt A(b,h) in Abhängigkeit von b und h:

erste Nebenbedingung ⇒ $l=2b$

$$A(b,h)=2\cdot 2b^2+2\cdot bh+2\cdot 2bh$$

$$A(b,h)=4b^2+2bh+4bh$$

$$A(b,h)=4b^2+6bh$$

Volumen V(b,h) in Abhängigkeit von b und h:

$$V(b,h)=2b\cdot b\cdot h$$

$$V(b,h)=2b^2\cdot h$$

Das Volumen des Quaders soll 100cm^3 betragen (=zweite Nebenbedingung).
Oberflächeninhalt A(x) bei 100cm$^{3:}$

zweite Nebenbedingung ⇒ $100=2b^2\cdot h \quad\Rightarrow\quad h=\frac{100}{2\mathrm{b}^2}$

$$A(b)=4b^2+\frac{6b\cdot 100}{2b^2}$$

$$A(b)=4b^2+\frac{300}{b}$$

$$A'(b)=8b-\frac{300}{b^2}$$

$$0=8b-\frac{300}{b^2}$$

$$300=8b$$

$$b=\frac{300}{8}=37{,}5\,[cm]$$

$$l=2b$$

$$l=2\cdot 37{,}5=75\,[cm]$$

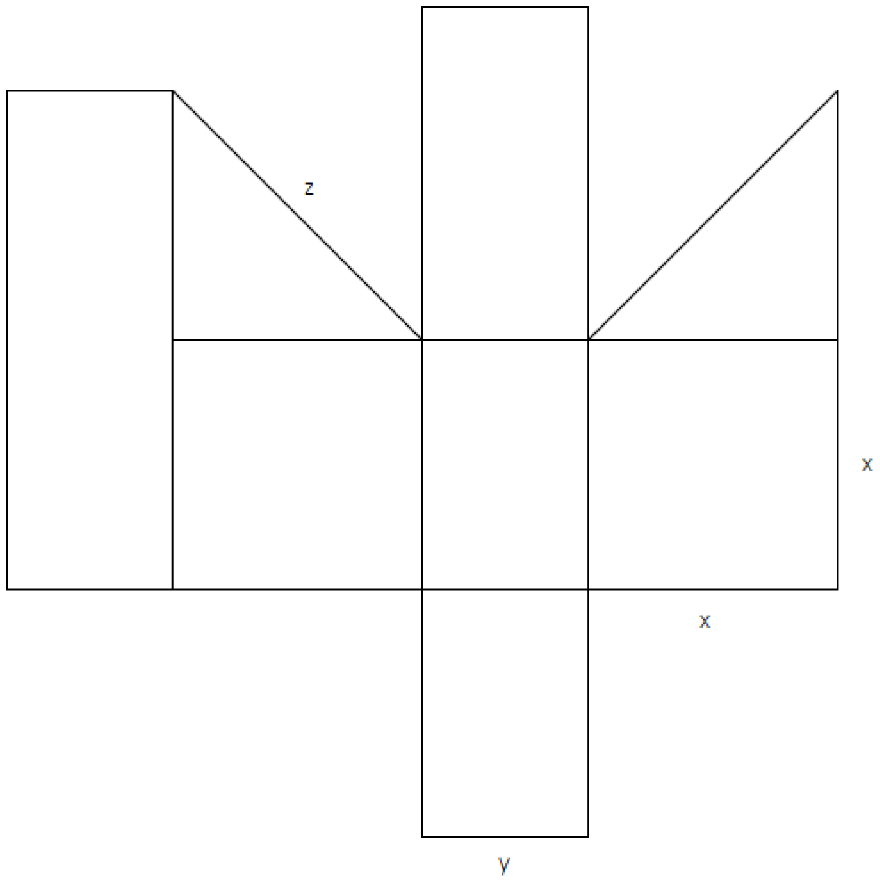
$$h=\frac{100}{2b^2}=\frac{100}{2\cdot(37{,}5)^2}=\frac{8}{225}=0{,}04$$

Bei $b=37{,}5\,cm$ und $l=75\,\mathrm{cm}$ sowie $h=0{,}04\,cm$ ist der Materialverbrauch minimal.

b) Nistkasten

Herr Nistel baut einen Nistkasten. Dafür zeichnet er das untenstehende Netz. Er möchte möglichst wenig Holz für den Bau verwenden.

Gesucht ist also die kleinste Oberfläche und damit das Minimum der Oberflächeninhaltsfunktion.



Oberflächeninhalt A(x,y) in Abhängigkeit in Abhängigkeit von x und y:

$$A(x,y)=2\cdot xy+2\cdot x^2+2\cdot\frac{1}{2}\cdot x^2+2\cdot xy=\sqrt{z}\,xy$$

$$Pythagoras\Rightarrow z=\sqrt{x^2+x^2}=\sqrt{2}\,x$$

$$A(x,y)=2\cdot xy+2x^2+x^2+\sqrt{2}\,x+2\cdot xy$$

$$A(x,y)=4\cdot xy+3\cdot x^2+\sqrt{2}\,xy$$

Volumen V(x,y) in Abhängigkeit von x und y:

$$V(x,y)=V_{unten}+\frac{1}{2}\cdot V_{oben}$$

$$V(x, y) = x^2 y + \frac{1}{2} x^2 y$$

$$V(x, y) = 1{,}5\, x^2 y$$

Das Volumen des Nistkastens soll 9 Liter betragen (=Nebenbedingung).
Oberflächeninhalt A(x) bei 9 Litern:

Nebenbedingung ⇒ $9 = \frac{3x^2}{2} y \quad \Rightarrow \quad y = \frac{9}{\frac{3x^2}{2}} = \frac{6}{x^2}$

$$A(x) = 3x^2 + 4\frac{x \cdot 6}{x^2} + \sqrt{2}\frac{x \cdot 6}{x^2}$$

$$A(x) = 3x^2 + \frac{24}{x} + \frac{6\sqrt{2}}{x}$$

$$A'(x) = 6x - \frac{24}{x^2} - \frac{6\sqrt{2}}{x^2}$$

$$0 = 6x - \frac{24}{x^2} - \frac{6\sqrt{2}}{x^2}$$

$$6x^3 = 24 + 6\sqrt{2}$$

$$x^3 = 4 + \sqrt{2}$$

$$x = \sqrt[3]{4 + \sqrt{2}} = 1{,}76\,[dm]$$

$$y = \frac{6}{(4 + \sqrt{2})^{\frac{2}{3}}} = 1{,}95\,[dm]$$

Bei $x = 1{,}76\, dm$ und $y = 1{,}95\, dm$ ist der Materialverbrauch minimal.