GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 1/17**

Exponentielles Wachstum und Logarithmus

Bei ausreichendem Angebot von Raum und Nährstoffen vermehrt sich eine Pilzkultur stündlich um 4 %. In einem biologischen Labor gelangen versehentlich 1000 Zellen dieser Kultur in den Vorratsbehälter für die Nährstofflösung.

Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der das Wachstum der Pilzkultur im Vorratsbehälter in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt und bestimmen Sie damit, wie lange es dauert, bis sich im Vorratsbehälter mehr als 1 Mio. Zellen befinden.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 2/17**

Radioaktiver Zerfall

Plutonium-239 hat eine Halbwertszeit von ca. 24 Jahren. 13 Jahre nach Beobachtungsbeginn liegen noch 0,900 kg Plutonium-239 einer Probe vor.

Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der die Menge der Probe an Plutonium-239 in Abhängigkeit von der Zeit t beschreibt und bestimmen Sie, wie viel Kilogramm der Probe nach 40 Jahren noch vorhanden sein wird.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 3/17**

Exponentialgleichungen

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Exponentialgleichung auf zwei Nachkommastellen genau.

$$5 \cdot 4^{2-x} = 4 \cdot 3^{2x}$$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 4/17**

Exponentialfunktionen

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Beschreiben Sie, wie der Graph von f aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hervorgeht und skizzieren Sie den Graphen von f unter Berücksichtigung seiner typischen Merkmale.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE — Lösung 1/17

Exponentielles Wachstum und Logarithmus

$f(t) = 1000 \cdot 1{,}04^t$ $\quad$ t: Zeit in Stunden

$f(t) = 1.000.000$

$1000 \cdot 1{,}04^t = 1.000.000$

$1{,}04^t = 1000$

$t = \log_{1{,}04} 1000 \approx 176{,}13$ Es dauert etwas über 176 Stunden.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE — Lösung 2/17

Radioaktiver Zerfall

$f(13) = b \cdot 0{,}5^{\frac{13}{24}} = 0{,}900$

$b = \frac{0{,}900}{0{,}5^{13/24}} = 1{,}310$ [kg]

$f(t) = 1{,}310 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{24}}$ $\quad$ t: Zeit in Jahren

$f(40) = 1{,}310 \cdot 0{,}5^{\frac{40}{24}} \approx 0{,}413$ [kg]

GRUNDWISSEN 10. KLASSE — Lösung 3/17

Exponentialgleichungen

$5 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 \cdot (3^2)^x$

$80 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 \cdot 9^x \qquad | : \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad | : 4$

$20 = 36^x$

$x = \log_{36} 20 \approx 0{,}84$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE — Lösung 4/17

Exponentialfunktionen

Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3, Spiegelung an der x-Achse

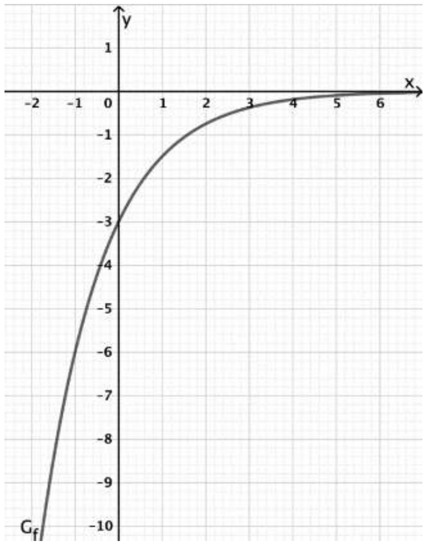
Typische Merkmale:

$S_y(0|-3)$

$P(1|-1{,}5)$

Asymptotisches Verhalten: nähert sich von unten an die x-Achse an

Monotonieverhalten: streng monoton steigend



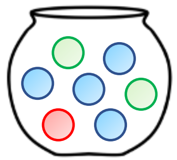
GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 5/17**

Pfadregeln

Aus der abgebildeten Urne (1 rote, 2 grüne, 4 blaue Kugeln) werden nacheinander zwei Kugeln zufällig ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse in Prozent auf eine Nachkommastelle genau.

A: "Zwei blaue Kugeln werden gezogen."

B: "Eine grüne und eine rote Kugel werden gezogen."



Bildquelle: DinRoe, https://unterrichten.zum.de/wiki

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 6/17**

Zufallsexperimente – Pfadregeln

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses E gilt: $P(E) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

Beschreiben Sie ein geeignetes Urnenexperiment und ein dazu passendes Ereignis E, sodass sich die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ mit dem obigen Term berechnen lässt.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 7/17**

Sinusfunktion

Bestimmen Sie zu der Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ alle Lösungen für $x \in \mathbb{R}$.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 8/17**

Allgemeine Sinusfunktion

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion f mit $f(x) = -3 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$ aus der Sinuskurve $x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 6/17**

Zufallsexperimente – Pfadregeln

Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 3 blauen, 4 roten und 2 grünen Kugeln.
E: "Es werden zwei blaue oder zwei rote Kugeln gezogen."

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 5/17**

Pfadregeln

$P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \approx 28{,}6\%$

$P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21} \approx 9{,}5\%$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 8/17**

Allgemeine Sinusfunktion

- Streckung in y-Richtung mit dem Faktor 3
- Spiegelung an der x-Achse
- Stauchung in x-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$
- Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links
- Verschiebung um 1 nach unten

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 7/17**

Sinusfunktion

$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3} \quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Alle Lösungen: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k$ oder $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 9/17**

Allgemeine Sinusfunktion

Geben Sie zu der Funktion f mit $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x) - 1$ die Periode, die Amplitude sowie die Wertemenge an und bestimmen Sie die erste positive Nullstelle auf zwei Nachkommastellen genau.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 10/17**

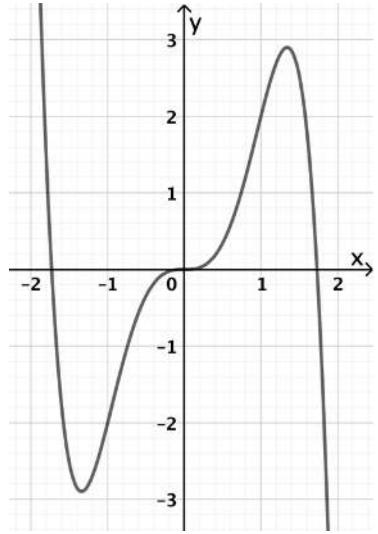
Ganzrationale Funktionen

Gegeben ist der rechts abgebildete Graph einer ganzrationalen Funktion. Geben Sie an, welcher der folgenden Funktionsterme zu dem Graphen gehört, und begründen Sie jeweils, warum Sie die anderen Terme ausschließen.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + 2$

$g(x) = -x^3 + 3x$

$h(x) = -x^5 + 3x^3$



GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 11/17**

Ganzrationale Funktionen

Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = -3x^5 + 6x^3$. Bestimmen Sie die Nullstellen von f samt Ihrer Vielfachheit und untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von f.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 12/17**

Ganzrationale Funktionen

Geben Sie den Term einer ganzrationalen Funktion f an, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- f besitzt ausschließlich Nullstellen bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$
- Der Graph von f ist symmetrisch zu y-Achse und verläuft von links unten nach rechts unten

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 9/17**

Allgemeine Sinusfunktion

Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ Amplitude $A = 1{,}5$

Wertemenge $W = [-2{,}5; 0{,}5]$

Erste Nullstelle:

$1{,}5 \cdot \sin(2x) - 1 = 0$

$\sin(2x) = \frac{2}{3}$

$x = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}36$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 10/17**

Ganzrationale Funktionen

Zum Graph passt der Term von $h(x)$.

$f(x)$ kann es nicht sein, da der Graph bzgl. des Grenzverhaltens von links unten nach rechts oben verlaufen müsste. Der Graph verläuft aber von links oben nach rechts unten.

$g(x)$ kann es nicht sein, da der Graph bei $x = 0$ eine dreifache Nullstelle besitzt. Der Graph von g besitzt bei $x = 0$ aber nur eine einfache Nullstelle, denn $g(x) = -x(x^2 - 3)$.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 11/17**

Ganzrationale Funktionen

Nullstellen: $f(x) = 0$

$-3x^3(x^2 - 2) = 0$

$x_1 = 0$ (dreifache Nullstelle)

$x^2 - 2 = 0$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$ (zwei einfache Nullstellen)

Symmetrie: $f(-x) = -3(-x)^5 + 6(-x)^3 = 3x^5 - 6x^3 = -f(x)$

$\Rightarrow$ Graph von f ist punktsymmetrisch zum Ursprung

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 12/17**

Ganzrationale Funktionen

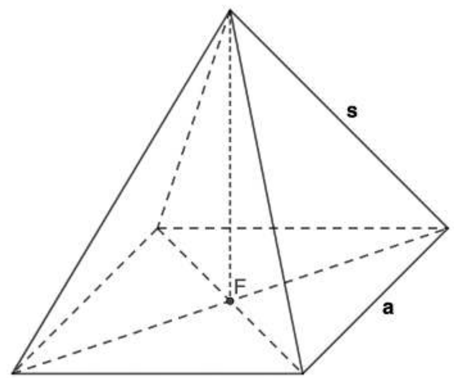
$f(x) = -x^2(x + 1)(x - 1)$

Erklärung: $x = 0$ doppelte Nullstelle, damit der Graph symmetrisch zur y-Achse ist und das negative Vorzeichen muss ergänzt werden, da der Graph sonst von rechts oben nach links oben verlaufen würde.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 13/17**

Pyramide

Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche der Seitenlänge $a = 16{,}4\ cm$ und Seitenkanten der Länge $s = 24{,}5\ cm$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide auf zwei Nachkommastellen genau.



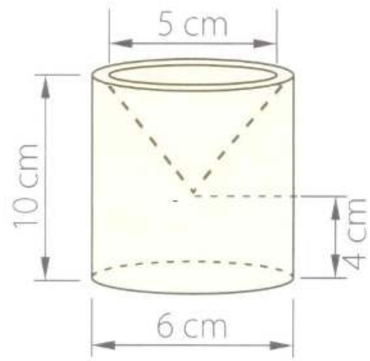
GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 14/17**

Kegel

Aus dem oberen Teil des Zylinders wird ein Kegel herausgeschnitten (vgl. Abb.).

Die Grundfläche des Kegels hat einen Durchmesser von 5cm (vgl. Abb).

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Restkörpers sowohl exakt und vollständig vereinfacht als auch auf zwei Nachkommastellen genau.



GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 15/17**

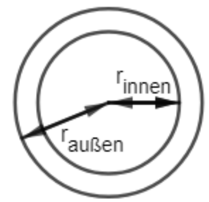
Kugel

a) Das Volumen einer Kugel beträgt $65{,}5\ cm^3$. Berechnen Sie den Radius der Kugel auf eine Nachkommastelle genau.
b) Eine andere Kugel hat einen Oberflächeninhalt von $145{,}5\ cm^2$. Berechnen Sie den Radius dieser Kugel auf eine Nachkommastelle genau.

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Aufgabe 16/17**

Kugel

Eine Schokohohlkugel hat einen Außenradius von 21mm und einen Innenradius vom 17mm. Berechnen Sie das Volumen der für die Schokohülle benötigten Schokolade in cm^3 auf zwei Nachkommastellen genau.



GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 14/17**

Kegel

$O_{Restkörper} = O_{Zylinder} - A_{Kreis} + M_{Kegel}$

$= 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 - \pi \cdot r_{Kreis}^2 + \pi \cdot r_{Kreis} \cdot m_{Kegel}$

$= 2\pi \cdot 3cm \cdot 10cm + 2\pi \cdot (3cm)^2 - \pi \cdot (2{,}5cm)^2 + \pi \cdot 2{,}5cm \cdot \sqrt{(2{,}5cm)^2 + (6cm)^2}$

$= 60\pi cm^2 + 18\pi cm^2 - 6{,}25\pi cm^2 + 16{,}25\pi cm^2 = 88\pi cm^2 \approx 276{,}46cm^2$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 13/17**

Pyramide

Die Höhe h_a zerlegt die Dreiecke der Mantelfläche der Pyramide in je zwei rechtwinklige Dreiecke ⇒ Anwendung des Satzes von Pythagoras: $s^2 = h_a^2 + (\frac{1}{2}a)^2$

$\Rightarrow h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{24{,}5^2 - 8{,}2^2}\ cm \approx 23{,}09\ cm$

Im Inneren der Pyramide entsteht mit der Höhe h_a und der Höhe der Pyramide ein weiteres rechtwinkliges Dreieck

⇒ Anwendung des Satzes von Pythagoras: $h_a^2 = h_{Pyramide}^2 + (\frac{1}{2}a)^2$

$\Rightarrow h_{Pyramide} = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{23{,}09^2 - 8{,}2^2}\ cm \approx 21{,}58\ cm$

$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide} \approx \frac{1}{3} \cdot (16{,}4\ cm)^2 \cdot 21{,}58\ cm \approx 1934{,}72\ cm^3$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 16/17**

Kugel

$V_{Hohlkugel} = V_{großeKugel} - V_{kleineKugel} = \frac{4}{3}\pi r_A^3 - \frac{4}{3}\pi r_I^3 = \frac{4}{3}\pi(r_A^3 - r_I^3)$

$= \frac{4}{3}\pi((21mm)^3 - (17mm)^3) \approx 18213mm^3 \approx 18{,}21cm^3$

GRUNDWISSEN 10. KLASSE **Lösung 15/17**

Kugel

a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

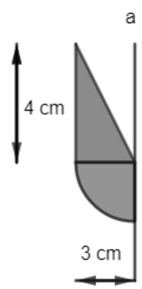
$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 65{,}5\ cm^3}{4\pi}} \approx 2{,}5cm$

b) $O = 4\pi r^2$

$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{145{,}5cm^2}{4\pi}} \approx 3{,}4cm$

Die nebenstehende Figur, bestehend aus einem Dreieck und einem Viertelkreis, rotiert um die Achse a.

Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers sowohl exakt und vollständig vereinfacht als auch auf zwei Nachkommastellen genau.



$$
\begin{aligned}
V_{rot} &= V_{Halbkugel} + V_{Zylinder} - V_{Kegel} \\
&= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^2 h \\
&= \tfrac{2}{3}\pi(3cm)^3 + \tfrac{2}{3}\pi(3cm)^2 \cdot 4cm = \tfrac{2}{3}\pi \cdot 27cm^3 + \tfrac{2}{3}\pi \cdot 9cm^2 \cdot 4cm \\
&= 18\pi cm^3 + 24\pi cm^3 = 42\pi cm^3 \approx 131{,}95cm^3
\end{aligned}
$$