Bei ausreichendem Angebot von Raum und Nährstoffen vermehrt sich eine Pilzkultur stündlich um 4 %. In einem biologischen Labor gelangen versehentlich 1000 Zellen dieser Kultur in den Vorratsbehälter für die Nährstofflösung.

Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der das Wachstum der Pilzkultur im Vorratsbehälter in Abhängigkeit von der Zeit $t$ beschreibt und bestimmen Sie damit, wie lange es dauert, bis sich im Vorratsbehälter mehr als 1 Mio. Zellen befinden.

$f(t) = 1000 \cdot 1{,}04^t$ $t$: Zeit in Stunden

$f(t) = 1.000.000$

$1000 \cdot 1{,}04^t = 1.000.000$

$1{,}04^t = 1000$

$t = \log_{1{,}04} 1000 \approx 176{,}13$ Es dauert etwas über 176 Stunden.

Plutonium-239 hat eine Halbwertszeit von ca. 24 Jahren. 13 Jahre nach Beobachtungsbeginn liegen noch 0,900 kg Plutonium-239 einer Probe vor.

Stellen Sie einen Funktionsterm auf, der die Menge der Probe an Plutonium-239 in Abhängigkeit von der Zeit $t$ beschreibt und bestimmen Sie, wie viel Kilogramm der Probe nach 40 Jahren noch vorhanden sein wird.

$$f(13) = b \cdot 0{,}5^{\frac{13}{24}} = 0{,}900$$

$$b = \frac{0{,}900}{0{,}5^{13/24}} = 1{,}310\ [\mathrm{kg}]$$

$$f(t) = 1{,}310 \cdot 0{,}5^{\frac{t}{24}} \quad t\text{: Zeit in Jahren}$$

$$f(40) = 1{,}310 \cdot 0{,}5^{\frac{40}{24}} \approx 0{,}413\ [\mathrm{kg}]$$

Bestimmen Sie die Lösung der folgenden Exponentialgleichung auf zwei Nachkommastellen genau.

$$5 \cdot 4^{2-x} = 4 \cdot 3^{2x}$$

$$5 \cdot 4^2 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 \cdot (3^2)^x$$

$$80 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^x = 4 \cdot 9^x \qquad \mid : \left(\frac{1}{4}\right)^x \qquad \mid : 4$$

$$20 = 36^x$$

$$x = \log_{36} 20 \approx 0{,}84$$

Gegeben ist die Funktion $f(x) = -3 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^x$. Beschreiben Sie, wie der Graph von $f$ aus dem Graphen der Funktion $x \mapsto \left(\frac{1}{2}\right)^x$ hervorgeht und skizzieren Sie den Graphen von $f$ unter Berücksichtigung seiner typischen Merkmale.

Streckung in $y$-Richtung mit dem Faktor 3, Spiegelung an der $x$-Achse

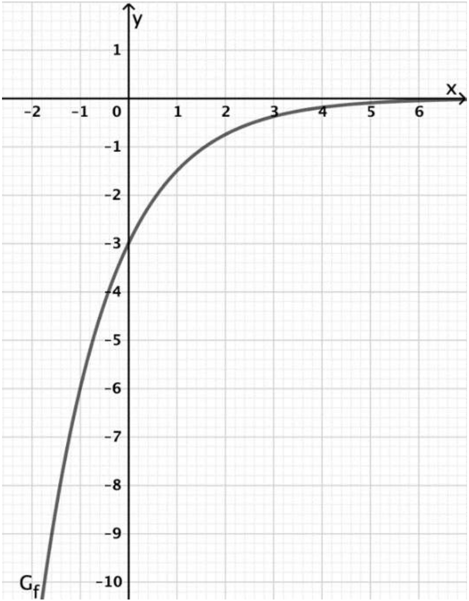
Typische Merkmale:

$S_y(0| -3)$

$P(1| -1{,}5)$

Asymptotisches Verhalten: nähert sich von unten an die $x$-Achse an

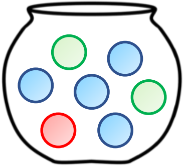
Monotonieverhalten: streng monoton steigend



Aus der abgebildeten Urne (1 rote, 2 grüne, 4 blaue Kugeln) werden nacheinander zwei Kugeln zufällig ohne Zurücklegen gezogen. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten der folgenden Ereignisse in Prozent auf eine Nachkommastelle genau.

A: "Zwei blaue Kugeln werden gezogen."

B: "Eine grüne und eine rote Kugel werden gezogen."



Bildquelle: DinRoe,
https://unterrichten.zum.de/wiki

$$P(A) = \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7} \approx 28{,}6\%$$

$$P(B) = \frac{1}{7} \cdot \frac{2}{6} + \frac{2}{7} \cdot \frac{1}{6} = \frac{2}{21} \approx 9{,}5\%$$

Für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $E$ gilt: $P(E) = \frac{3}{9} \cdot \frac{2}{8} + \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{8}$.

Beschreiben Sie ein geeignetes Urnenexperiment und ein dazu passendes Ereignis $E$, sodass sich die Wahrscheinlichkeit $P(E)$ mit dem obigen Term berechnen lässt.

Zweimaliges Ziehen ohne Zurücklegen aus einer Urne mit 3 blauen, 4 roten und 2 grünen Kugeln.
$E$: "Es werden zwei blaue oder zwei rote Kugeln gezogen."

Bestimmen Sie zu der Gleichung $\sin(x) = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ alle Lösungen für $x \in \mathbb{R}$.

$x_1 = \sin^{-1}\left(\frac{1}{2}\sqrt{3}\right) = \frac{\pi}{3}$ $\quad x_2 = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2}{3}\pi$

Alle Lösungen: $x = \frac{\pi}{3} + 2\pi \cdot k$ oder $x = \frac{2}{3}\pi + 2\pi \cdot k$ mit $k \in \mathbb{Z}$

Beschreiben Sie, wie der Graph der Funktion $f$ mit $f(x) = -3 \cdot \sin\left(2\left(x + \frac{\pi}{4}\right)\right) - 1$ aus der Sinuskurve $x \mapsto \sin(x)$ hervorgeht.

- Streckung in $y$-Richtung mit dem Faktor $3$
- Spiegelung an der $x$-Achse
- Stauchung in $x$-Richtung mit dem Faktor $\frac{1}{2}$
- Verschiebung um $\frac{\pi}{4}$ nach links
- Verschiebung um $1$ nach unten

Geben Sie zu der Funktion $f$ mit $f(x) = 1{,}5 \cdot \sin(2x) - 1$ die Periode, die Amplitude sowie die Wertemenge an und bestimmen Sie die erste positive Nullstelle auf zwei Nachkommastellen genau.

Periode $p = \frac{2\pi}{2} = \pi$ Amplitude $A = 1{,}5$

Wertemenge $W = [-2{,}5; 0{,}5]$

Erste Nullstelle:

$1{,}5 \cdot \sin(2x) - 1 = 0$

$\sin(2x) = \frac{2}{3}$

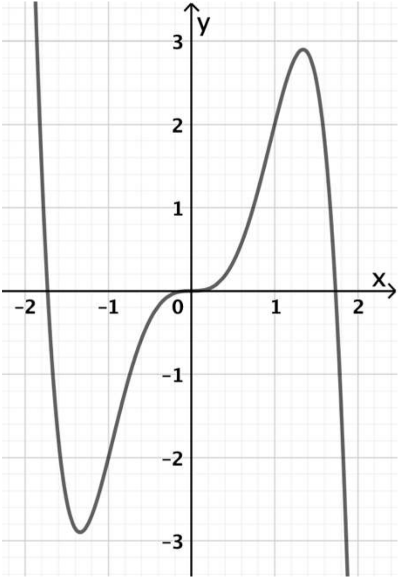
$x = \frac{1}{2} \cdot \sin^{-1}\left(\frac{2}{3}\right) \approx 0{,}36$

Gegeben ist der rechts abgebildete Graph einer ganzrationalen Funktion. Geben Sie an, welcher der folgenden Funktionsterme zu dem Graphen gehört, und begründen Sie jeweils, warum Sie die anderen Terme ausschließen.

$f(x) = x^5 + 3x^3 + 2$

$g(x) = -x^3 + 3x$

$h(x) = -x^5 + 3x^3$



Zum Graph passt der Term von $h(x)$.

$f(x)$ kann es nicht sein, da der Graph bzgl. des Grenzverhaltens von links unten nach rechts oben verlaufen müsste. Der Graph verläuft aber von links oben nach rechts unten.

$g(x)$ kann es nicht sein, da der Graph bei $x = 0$ eine dreifache Nullstelle besitzt. Der Graph von $g$ besitzt bei $x = 0$ aber nur eine einfache Nullstelle,
denn $g(x) = -x(x^2 - 3)$.

Gegeben ist die ganzrationale Funktion $f(x) = -3x^5 + 6x^3$. Bestimmen Sie die Nullstellen von $f$ samt Ihrer Vielfachheit und untersuchen Sie das Symmetrieverhalten des Graphen von $f$.

Nullstellen: $f(x) = 0$

$-3x^3(x^2 - 2) = 0$

$x_1 = 0$ (dreifache Nullstelle)

$x^2 - 2 = 0$

$x_{2/3} = \pm\sqrt{2}$ (zwei einfache Nullstellen)

Symmetrie: $f(-x) = -3(-x)^5 + 6(-x)^3 = 3x^5 - 6x^3 = -f(x)$

$\Rightarrow$ Graph von $f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

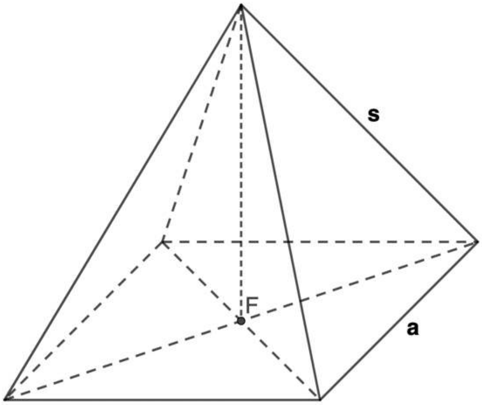
Geben Sie den Term einer ganzrationalen Funktion $f$ an, die die folgenden Eigenschaften besitzt:

- $f$ besitzt ausschließlich Nullstellen bei $x = -1$, $x = 0$ und $x = 1$
- Der Graph von $f$ ist symmetrisch zu $y$-Achse und verläuft von links unten nach rechts unten

$f(x) = -x^2(x+1)(x-1)$

Erklärung: $x = 0$ doppelte Nullstelle, damit der Graph symmetrisch zur $y$-Achse ist und das negative Vorzeichen muss ergänzt werden, da der Graph sonst von rechts oben nach links oben verlaufen würde.

Eine gerade Pyramide hat eine quadratische Grundfläche der Seitenlänge $a = 16{,}4\ cm$ und Seitenkanten der Länge $s = 24{,}5\ cm$. Berechnen Sie das Volumen der Pyramide auf zwei Nachkommastellen genau.



Die Höhe $h_a$ zerlegt die Dreiecke der Mantelfläche der Pyramide in je zwei rechtwinklige Dreiecke ⇒ Anwendung des Satzes von Pythagoras: $s^2 = h_a^2 + (\frac{1}{2}a)^2$

$$\Rightarrow h_a = \sqrt{s^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{24{,}5^2 - 8{,}2^2}\ cm \approx 23{,}09\ cm$$

Im Inneren der Pyramide entsteht mit der Höhe $h_a$ und der Höhe der Pyramide ein weiteres rechtwinkliges Dreieck

⇒ Anwendung des Satzes von Pythagoras: $h_a^2 = h_{Pyramide}^2 + (\frac{1}{2}a)^2$

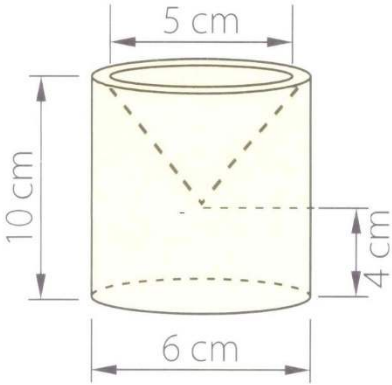
$$\Rightarrow h_{Pyramide} = \sqrt{h_a^2 - \left(\frac{1}{2}a\right)^2} = \sqrt{23{,}09^2 - 8{,}2^2}\ cm \approx 21{,}58\ cm$$

$$V_{Pyramide} = \frac{1}{3} \cdot G \cdot h_{Pyramide} \approx \frac{1}{3} \cdot (16{,}4\ cm)^2 \cdot 21{,}58\ cm \approx 1934{,}72\ cm^3$$

Aus dem oberen Teil des Zylinders wird ein Kegel herausgeschnitten (vgl. Abb.).

Die Grundfläche des Kegels hat einen Durchmesser von 5cm (vgl. Abb).

Berechnen Sie den Oberflächeninhalt des Restkörpers sowohl exakt und vollständig vereinfacht als auch auf zwei Nachkommastellen genau.



$$O_{Restkörper} = O_{Zylinder} - A_{Kreis} + M_{Kegel}$$

$$= 2\pi \cdot r \cdot h + 2\pi \cdot r^2 - \pi \cdot r_{Kreis}^2 + \pi \cdot r_{Kreis} \cdot m_{Kegel}$$

$$= 2\pi \cdot 3cm \cdot 10cm + 2\pi \cdot (3cm)^2 - \pi \cdot (2{,}5cm)^2 + \pi \cdot 2{,}5cm \cdot \sqrt{(2{,}5cm)^2 + (6cm)^2}$$

$$= 60\pi cm^2 + 18\pi cm^2 - 6{,}25\pi cm^2 + 16{,}25\pi cm^2 = 88\pi cm^2 \approx 276{,}46cm^2$$

a) Das Volumen einer Kugel beträgt $65{,}5\ cm^3$. Berechnen Sie den Radius der Kugel auf eine Nachkommastelle genau.

b) Eine andere Kugel hat einen Oberflächeninhalt von $145{,}5\ cm^2$. Berechnen Sie den Radius dieser Kugel auf eine Nachkommastelle genau.

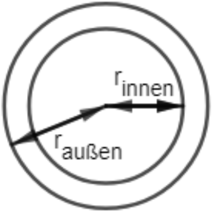
a) $V = \frac{4}{3}\pi r^3$

$$r = \sqrt[3]{\frac{3V}{4\pi}} = \sqrt[3]{\frac{3 \cdot 65{,}5\ cm^3}{4\pi}} \approx 2{,}5cm$$

b) $O = 4\pi r^2$

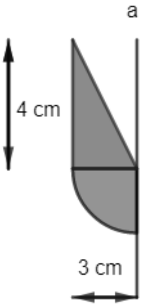
$$r = \sqrt{\frac{O}{4\pi}} = \sqrt{\frac{145{,}5cm^2}{4\pi}} \approx 3{,}4cm$$

Eine Schokohohlkugel hat einen Außenradius von 21mm und einen Innenradius vom 17mm. Berechnen Sie das Volumen der für die Schokohülle benötigten Schokolade in $cm^3$ auf zwei Nachkommastellen genau.



$$V_{Hohlkugel} = V_{großeKugel} - V_{kleineKugel} = \frac{4}{3}\pi r_A^3 - \frac{4}{3}\pi r_I^3 = \frac{4}{3}\pi(r_A^3 - r_I^3)$$
$$= \frac{4}{3}\pi((21mm)^3 - (17mm)^3) \approx 18213mm^3 \approx 18{,}21cm^3$$

Die nebenstehende Figur, bestehend aus einem Dreieck und einem Viertelkreis, rotiert um die Achse a.




Berechnen Sie das Volumen des Rotationskörpers sowohl exakt und vollständig vereinfacht als auch auf zwei Nachkommastellen genau.

$$\begin{aligned} V_{rot} &= V_{Halbkugel} + V_{Zylinder} - V_{Kegel} \\ &= \frac{2}{3}\pi r^3 + \pi r^2 h - \frac{1}{3}\pi r^2 h = \frac{2}{3}\pi r^3 + \frac{2}{3}\pi r^2 h \\ &= \frac{2}{3}\pi(3cm)^3 + \frac{2}{3}\pi(3cm)^2 \cdot 4cm = \frac{2}{3}\pi \cdot 27cm^3 + \frac{2}{3}\pi \cdot 9cm^2 \cdot 4cm \\ &= 18\pi cm^3 + 24\pi cm^3 = 42\pi cm^3 \approx 131{,}95cm^3 \end{aligned}$$